

原子核集団運動の微視的理論

中務 孝

東北大学大学院理学研究科物理学専攻^{*1}

1 はじめに

この講義では、原子核における集団運動とその微視的理論、つまり核子の自由度による集団的な自由度の記述に重点を置く。集団運動は、原子核の巨視的・古典的な側面が現れることが多く、液滴模型、ボア模型、統一模型など、様々なアプローチが可能であるが、すべてを網羅することは時間的にも不可能なので、本講義では、量子的多体論からのアプローチを取ることにし、平均場理論とその拡張を中心に据える。講義は以下の内容で行なった。

- (i) 原子核の液体的性質と気体的性質
- (ii) 核力と Brückner-Hartree-Fock 理論
- (iii) 原子核の変形とは何か：平均場理論 (HF, BCS, HFB)
- (iv) 原子核の励起モード：時間依存平均場 (TDHF, TDHFB)、線形応答理論、乱雑位相近似 (RPA)、準粒子乱雑位相近似 (QRPA)
- (v) 高スピン原子核構造：時間反転対称性を破った平均場と素励起モード
- (vi) 大振幅集団運動理論：自己無撞着な集団座標の決定

^{*1} 2004 年 1 月以降：筑波大学物理学系

この講義録は、修士 1 年程度の大学院生を対象にしており、専門の研究者にとっては退屈なものであることをあらかじめお断りしておく。原子核物理を学ぶに当たっての基礎知識と、典型的な集団運動である振動・変形・回転・対変形についての簡単な解説を載せた。頁数制限の都合上、理論の概要の平易な解説を中心にし、通常の原子核物理や量子多体論の教科書に書かれている内容については詳細を思い切って省略した。また、講義では、実験データとの関連も議論したが、残念ながらここではそれも省略した。原子核集団運動理論の基礎について感覚的な理解を目的とした内容になっている(つもりである)。興味を持った学生(読者)は、本文中に挙げた教科書やレビューを参照してもらいたい。最後にいくつか原子核集団運動に詳しい教科書をリストアップした。実際に問題を解くことで物理の理解はより進むと思うので、中に演習問題も入れた。学部レベルの量子力学の知識で解ける内容がほとんどである。

集団運動の話に入る前に、核物理一般を研究するに当たって、最も基礎となる問題をいくつかここに挙げた。この第一節にある問題は、当り前すぎてつまらない、と感じられるくらいが理想的。まず、原子核のサイズ、エネルギーなどの大まかな理解を得ることは重要である。以下の原子核に関する簡単なオーダー評価をしてみよう。

問題 1.1 湯川秀樹の予言したパイ中間子の質量を 140 MeV とすると、そのコンプトン波長はどれくらいか。

問題 1.2 核力がパイ中間子交換から引力を得ているとすれば、上で求めた波長の長さを核力ポテンシャルの到達距離(レンジ)と見なして良いであろう。陽子と中性子が重陽子として核力のレンジ程度の大きさに束縛するためには、どの程度ポテンシャルが深い必要があるか。(ヒント:不確定性関係から運動エネルギーの大きさを評価してみよ。)

問題 1.3 荷電パイ中間子の寿命は $2.6 \times 10^{-8} \text{ s}$ 、中性パイ中間子は $7.6 \times 10^{-17} \text{ s}$ である。不確定性関係から決まるエネルギー幅はそれぞれどの程度になるか? バリオンでも、 Λ 粒子の寿命は $2.5 \times 10^{-10} \text{ s}$ 、 Δ 粒子は $6 \times 10^{-24} \text{ s}$ である。同程度の質量を持つのに、寿命にこれほど大きな違いがある理由は何であろうか。

原子核構造論では、一粒子平均場ポテンシャルの第ゼロ近似として、調和振動子ポテンシャルを仮定することができる。そこで、調和振動子の量子力学を理解しておくことは重要である。固有状態の波動関数を求めてみよう。

問題 1.4 一次元の調和振動子 (質量 m 、振動数 ω) の固有関数を、

$$\psi(x) = f(x) \exp(-x^2/2b^2)$$

と置いて $f(x)$ に関する微分方程式を求めよ。 $b^2 \equiv \hbar/m\omega$ は振動子長 (oscillator length) と呼ばれる。 $H(x/b) \equiv f(x)$ と置けば、 $H(\xi)$ の満たす方程式は、 $E = (n + 1/2)\hbar\omega$ のとき、エルミート多項式が満たす微分方程式に一致することを確かめよ。

問題 1.5 三次元調和振動子の固有関数は、上の一次元での解を $\Psi(\mathbf{r}) = \psi_{n_x}(x)\psi_{n_y}(y)\psi_{n_z}(z)$ のように掛け合わせれば良い。なぜこれが許されるのか。また、等方調和振動子 ($\omega_x = \omega_y = \omega_z$) の場合、基底状態の波動関数は極座標で書くとどうなるか。エネルギースペクトルはどうなるか。

問題 1.6 三次元等方調和振動子について。

(a) ハミルトニアンを運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和 ($H = T+V$) に分解すると、エネルギー固有状態 $|\mathbf{n}\rangle$ において、 $\langle \mathbf{n}|T|\mathbf{n}\rangle = \langle \mathbf{n}|V|\mathbf{n}\rangle$ であることを示せ。ここで、 $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ である。

(b) 上の事実を用いて、 $\langle \mathbf{n}|r^2|\mathbf{n}\rangle$ を求めよ。

(c) 陽子・中性子が同数であるとし、全振動量子数 $N = n_x + n_y + n_z$ が N_{\max} までの状態をすべて占有しているとする。原子核の平均 2 乗半径 $A\langle r^2 \rangle = \sum_{k=1}^A \langle r_k^2 \rangle$ を求めよ。

問題 1.7 調和振動子ポテンシャルは遠方で発散するが、原子核の平均場ポテンシャルは本来遠方でゼロになるべきである。上の波動関数の遠方での振舞 $e^{-r^2/2b^2}$ は、どのような形に変更すべきか。

問題 1.8 その他に、現実的な原子核の平均場ポテンシャルと調和振動子の間には、どのような違いがあるか。

極座標において三次元等方調和振動子の Schrödinger 方程式を実際に解くと、全振動量子数 $N = 2n + l$ となり、動径波動関数は、Laguerre 多項式を用いて $R_{nl}(r) \propto r^l L_n^{l+1/2}((r/b)^2)$ となる。状態の軌道角運動量は、下から、 $s, p, s+d, p+f, \dots$ と分類される。三次元調和振動子のエネルギースペクトルの構造は、量子力学や原子核物理の教科書を見て完全に理解しておこう。

2 素励起モード：個別励起と集団励起

基底状態 $|0\rangle$ にある系に対して、外界から小さな摂動 \hat{V}_{ext} を働きかけたとき、どのように励起状態に移っていくか（これを応答 (response) という）を調べると、様々な種類の励起状態があることが分かる。ある状態は、近似的に基底状態からひとつの粒子だけがその状態を変化させたような状態、つまり一粒子励起状態 (single-particle excitation) であり、また複数の粒子が状態を変化させているような励起状態も存在するであろう。多数の構成粒子が状態を変化させ、なおかつ「そろった運動」をしている場合、集団励起 (collective excitation) と呼ぶ。振動励起 (フォノン)、回転励起など集団的な励起モードは、基底状態の性質に非常に敏感である。原子核のような多粒子系の性質を理解する場合、このような素励起 (elementary excitation) の性質を調べることは重要で、実験的には、素励起モードの性質から基底状態の構造を知ることができる。では、上で述べた「そろった運動」とは、どんな運動であろうか。古典的には、ある決まった方向に多数の粒子が一齐に動くことであると理解できるが、量子力学的には直観的な理解が難しいかもしれない。同じような意味の言葉として、「運動がコヒーレント (coherent) である」という言い方をすることもある。この意味を考えてみよう。

基底状態 $|0\rangle$ に作用させたときに励起状態 $|n\rangle$ を作ることでできる演算子を Ω_n^\dagger としよう。乱雑位相近似 (random-phase approximation) などでは、規準励起モード (normal mode of excitation) 生成演算子と呼ばれる。

$$|n\rangle = \Omega_n^\dagger |0\rangle. \quad (1)$$

今、ハミルトニアンは、一粒子ハミルトニアンと残留相互作用の和で与えられるとし、

$$H = h_{\text{sp}} + V_{\text{res}} = \sum_{\mu} \epsilon_{\mu} c_{\mu}^{\dagger} c_{\mu} + \frac{1}{4} \sum_{\mu\nu\rho\sigma} V_{\mu\nu\rho\sigma} c_{\mu}^{\dagger} c_{\nu}^{\dagger} c_{\sigma} c_{\rho}. \quad (2)$$

ここで一粒子ハミルトニアンの部分を対角化する基底を取り、 c_{μ}^{\dagger} は核子を一粒子レベル $|\mu\rangle$ に生成する演算子である。場の理論 (第二量子化) の言語を使っているが、微視的多体論においては、記述を見通し良くするために必須のものと言える。 h_{sp} としては、次節で簡単に触れる平均場理論 (Hartree-Fock など) から得られるものを用いるのがベストであろうが、とりあえず殻模型 (shell model) のポテンシャルや、もっと簡単な3次元等方調和振動子ポテンシャル中のフェルミ粒子を思い浮かべてもらえれば良い。

もし残留相互作用 V_{res} を無視する近似をとれば、粒子数 A の原子核の基底状態は、一

粒子レベルを下から A 本占有した状態

$$|0\rangle = c_1^\dagger c_2^\dagger \cdots c_A^\dagger |0\rangle, \quad (3)$$

であり、 $|0\rangle$ は粒子が全く存在しない真空である。このとき、1 粒子-1 空孔 (1p1h) 演算子

$$\Omega_{ph}^\dagger = c_p^\dagger c_h, \quad (4)$$

や、2p2h 演算子

$$\Omega_{pp'hh'}^\dagger = c_p^\dagger c_{p'}^\dagger c_h c_{h'}, \quad (5)$$

などは規準励起演算子となる。 $np-nh$ の規準モードを同様にして定義できるが、ではこの n を大きく取ったものは集団励起モードと呼べるだろうか。 n 粒子が一斉に関与する励起モードではあるが、答えは否である。この運動は一般には「そろっていない」のである。

では次に多数存在している 1p1h 励起状態 ($|ph\rangle = \Omega_{ph}^\dagger |0\rangle$) 間に残留相互作用が働く場合を考えよう。単純化して、すべての 1p1h 状態のエネルギーが等しく ($\epsilon = \epsilon_p - \epsilon_h = \text{const.}$)、また、あらゆる 1p1h 状態間に同じ大きさ (v_0) の残留相互作用が働くとする。つまり、

$$h_{\text{sp}}|ph\rangle = \epsilon|ph\rangle, \quad (6)$$

$$\langle p'h'|V_{\text{res}}|ph\rangle = v_0, \quad (7)$$

ここで基底状態、(3) 式、のエネルギーをゼロとした。このとき、1p1h 空間 $\{|ph\rangle\}$ 内でハミルトニアンを対角化すればすぐに分かるように、一つの状態だけがエネルギー

$$E = \epsilon + (N_{ph} - 1)v_0 \quad (8)$$

をもち、残りの状態はすべてエネルギー $\epsilon - v_0$ であることが分かる。ここで、 N_{ph} は 1p1h 状態の数。(8) 式のエネルギーをもつ状態が集団励起状態 $|\text{col}\rangle$ である。このハミルトニアンの対角化は演習問題としておく。結果としての固有状態はあらゆる $|ph\rangle$ の重ね合わせになっている。つまり、

$$|\text{col}\rangle = \sum_{ph} C_{ph} |ph\rangle, \quad (9)$$

となっていて、係数 C_{ph} は $\sqrt{1/N_{ph}}$ のオーダーの数である。 N_{ph} が大きいとき、係数 C_{ph} は小さくなり、その励起エネルギーは v_0 が正のとき ϵ (1p1h 励起エネルギー) に比べて大きく、 v_0 が負のときには小さくなる。前者が高励起集団モード (例：アイソベクター型巨大共鳴)、後者が低励起集団モード (例：表面振動) に対応する。

ここで得られた集団励起モードを生成する規準モード演算子は、

$$\Omega_{\text{col}}^\dagger = \sum_{ph} C_{ph} \Omega_{ph}^\dagger \quad (10)$$

で与えられることは自明であろう。このような 1p1h 状態の重ね合わせで表すことのできるモードは、基底状態からのずれが小さな運動であり、小振幅の振動運動などである。回転運動の場合には、(9) 式のような 1p1h 状態の重ね合わせだけで記述することは不可能であるが、角運動量射影法など、別の方法で状態を近似的に構成することは可能である。

また、 N_{ph} が大きくなる極限で、 C_{ph} がゼロに近づくという事実は、この励起モードがボソンのように振舞うことを可能にする。そもそもフェルミオンの系である原子核にボソンのようなフォノン励起が存在することを不思議に思ったことはないだろうか。一つ一つの 1p1h チャンネルに励起する要素は小さいため、例えば $(\Omega_{\text{col}}^\dagger)^2|0\rangle$ という状態を作ってみると、この中でパウリ原理で禁止される成分は $1/N_{ph}$ の割合でしか存在しないことがわかる。後で述べる、超伝導クーパー対がボソンのように振舞う理由も同じである。

問題 2.1 1p1h 空間 $\{|ph\rangle\}$ 内で (2)、(6)、(7) 式で与えられるハミルトニアンを対角化し、固有値、固有ベクトルを求めよ。

さて、ここまでで、集団励起モードが存在するためには残留相互作用が重要な役割を果たしていることが理解できたであろうか。残留相互作用が集団運動を作り出していると言っても過言ではない。回転運動のような自明な場合でも、変形した原子核を回そうとする力は、まさに残留相互作用から来ている。ここで、2 体の残留相互作用が 1 体エルミート演算子 Q の積でかけるとし、

$$V_{\text{res}} = \kappa Q \cdot Q, \quad (11)$$

とする。このような相互作用を分離型相互作用 (separable interaction) という。簡単のため、この 1 体演算子はあらゆる 1p1h 状態に対して、 $\langle ph|Q|0\rangle = q_0$ 、 $\langle p'h'|Q|ph\rangle = \langle p'h'p''h''|Q|ph\rangle = 0$ という性質を持つと仮定しよう。このとき $v_0 = \kappa q_0^2$ は明らかであろう。ここで、問題で求めた固有状態を用いて遷移行列要素を計算してみると、

$$|\langle \text{col}|Q|0\rangle|^2 = N_{ph} q_0^2, \quad (12)$$

となる。つまり、1p1h 励起状態の遷移行列要素 $|\langle ph|Q|0\rangle|^2$ が N_{ph} 倍に強められているのである。これが、「そろった運動」の量子力学的な表現のひとつで、この場合は 1 体演算子 Q で励起される方向に多数の核子の運動がそろっていると言える。

この節では問題を単純化したが、1p1h エネルギーの非縮退や残留相互作用の状態依存性を採り入れれば、ここでの取扱は、Tamm-Dancoff 近似と呼ばれる方法と本質的に同じものである。

問題 2.2 (12) 式を証明せよ。また、非集団的励起と基底状態との間の遷移行列要素はどうなるか。

Tamm-Dancoff 近似では、ここで取り扱ったように、励起状態を 1p1h 状態の重ね合わせとして記述しているが、基底状態は元の残留相互作用が無い場合の $|0\rangle$ と同じである。真の基底状態は、残留相互作用により、より複雑な構造を持つようになるはずであり、(3) 式のような簡単な形には記述できない。この基底状態相関 (ground-state correlation) の不在は、Tamm-Dancoff 近似の限界の一つである。また、この問題に関係して、理論の不変性の破れ、エネルギー加重和則 (energy weighted sum rule) の破れなどの問題点もある。自己無撞着 (self-consistent) な理論から導き出される乱雑位相近似 (RPA) は、Tamm-Dancoff 理論の発展版と見なすこともできるが、小振幅の集団運動に関する完成された理論であり、これらの問題点が解決される。但し、RPA もまた調和近似に基づく理論であるため、非調和性が重要になる大振幅集団運動を記述することは不可能である。

3 原子核の変形及び回転 —平均場と自発的対称性の破れ—

前節での簡単なモデルの解析で得られた集団励起モードの励起エネルギー (8) 式をもう一度見てみよう。 v_0 が負 (引力) の場合には、 N_{ph} が大きくなると、やがて励起エネルギーが負になってしまう。 $|v_0|$ を大きく、あるいは (11) 式でいえば結合定数の κ を大きくしても同様である。乱雑位相近似 (RPA) で扱うと、実はもっと早く正エネルギーの解が虚数エネルギーの状態になってしまう。これらは何を意味しているのか。状態 $\Omega_{col}^\dagger|0\rangle$ の方が、基底状態 $|0\rangle$ よりもエネルギーが低いことから、前者を基底状態とすべきであろう。さらに、励起モード Ω_{col}^\dagger がボソンのことであるということは、このモードをいくつも状態 $|0\rangle$ に生成してやるのが可能で、そのことでエネルギーをさらに下げてやることができそうである。つまり、このフォノン・モードが凝縮 (condensation) した状態が真の基底状態になると言える。別の言い方をすれば、(2) 式のハミルトニアンで、残留相互作用の V_{res} をもっと弱くするより良い h_{sp} と V_{res} の分離の仕方があるということを行っているのである。一粒子ハミルトニアン h_{sp} を変更するという事は、平均場を変更することであり、原子核が「変形」するということを意味する。RPA では、平均場の基底状態の

不安定性と虚エネルギー解との間には厳密な関係が存在する (参考文献に挙げた教科書等を参考)。

基底状態の「変形」の度合を求めるには、Hartree-Fock(HF) 法に代表される自己無撞着な平均場理論を通常用いる。本来のハミルトニアン自身は回転不変性を持つため、変形した HF 基底状態を得るには、核子間の重要な相関を取り入れる事で自発的に対称性を破ることが必要となる。多くの実験から、球形近傍の原子核における低励起集団運動の中で、強い集団性を示すものは 2^+ の状態であることが分かるため、変形に關与する最も重要なフォノン、 $1p1h$ が 2^+ に対を組んだ時に引力を受ける四重極相関であると理解できる。この種の相関が強くなると、 2^+ のフォノンはエネルギーを下げ、やがてフォノンが凝縮する形で、新たな基底状態が実現する。この時、その強い相関を平均場に取り入れることで、基底状態 (真空) は本来持っていた対称性を失い、「変形」した状態を得る。すなわち、新たに得られた平均場の基底状態 $|0'\rangle$ は回転対称性を失い、例えば、四重極演算子

$$Q_{20} = \int d^3r \hat{\psi}^*(\mathbf{r}) r^2 Y_{20} \hat{\psi}(\mathbf{r}) = \sum_{\mu\nu} \langle \mu | r^2 Y_{20} | \nu \rangle c_{\mu}^{\dagger} c_{\nu} \quad (13)$$

が有限の真空期待値

$$q = \langle 0' | Q_{20} | 0' \rangle \neq 0 \quad (14)$$

をもつ (図 1(b))。この q が、変形を特徴づける量であり、いわゆる相転移での秩序パラメータ (order parameter) と見なすことができる。現実の原子核では、HF 法では取り入れられない対相関が重要であり、Hartree-Fock-Bogoliubov(HFB) 法、あるいはその簡易バージョンともいえる HF+BCS 法などに拡張した平均場を用いる必要がある (次節を参照)。Bohr と Mottelson は、このような重要な相関を簡単な形で取り入れた現象論的な模型として、対相関力と四重極相関力 “Pairing-plus-quadrupole interaction” という模型を提唱し、その後の核構造研究のひとつのパラダイムを造った。この模型は、低エネルギーの集団的ダイナミクスを多くの原子核において定性的に良く説明することが分かっている。

さて、ここで少し寄り道をして、原子核理論における平均場について考察しておこう。HF 理論は自己無撞着性を要求しているため、2 体のポテンシャルを摂動と見た場合、部分的に無限次までの効果を取り入れていることになる。では、核子間の核力ポテンシャルをそのまま使って HF 計算を実行すれば良いかというと、これはうまくいかない。散乱データを再現するような生の核力は近距離の強い斥力があるため、平均場近似では原子核は束縛されずバラバラになってしまうだろう。つまり、原子核では強い 2 体相関が重要で、2 粒子がある程度の距離を常に保ちつつお互いに何とか引力を及ぼしあって

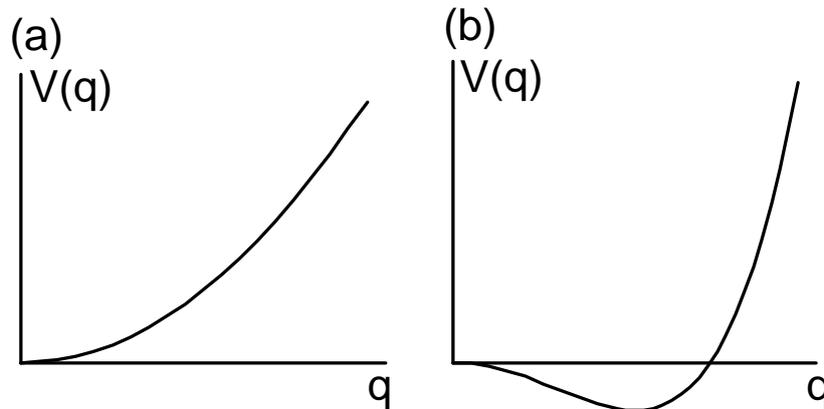


図1 横軸 q が秩序パラメータ (変形度). (a) 相関が弱い時. $q = 0$ の状態が基底状態.
 (b) 相関が強い時. $q \neq 0$ の変形状態が基底状態.

束縛しているというのが、真の姿なのである。この強い2体相関を状態ではなく相互作用の方へ繰り込んでしまって、平均場計算を可能にしようというアイデアが、いわゆる Brückner-Hartree-Fock の理論である。比較的密度が低く、近距離の強い相関がある系一般において非常に有力な方法で、原子核理論の一つの大きな成果と言える。詳細は多くの教科書やレビューに書かれているので省略するが、理論のエッセンスは、強い2体相関を取り入れた真の状態 $|\Psi\rangle$ における2体の核力 V の効果と、平均場で記述されるような2体相関無しの状態 $|\Phi\rangle$ における「有効ポテンシャル」 G の効果が等しくなることである。

$$V|\Psi\rangle = G|\Phi\rangle \quad (15)$$

この結果、有効核力として得られた G には近距離の斥力が無く、HF 計算などに使うことが可能である。 $|\Psi\rangle$ と $|\Phi\rangle$ の違いは、2粒子が平均核子間距離くらいまで離れば実質的に消えてしまい、独立粒子描像 (フェルミ気体) が正当化される。この時重要なのはパウリ原理の効果である。パウリ原理により、2核子が近距離で強く散乱されても、漸近的には位相のずれが現れず、あたかも散乱が無かったかのような振舞を示すのである。

以上のことを理解しておくことは重要で、つまり、ここで得られた有効核力は2体相関を無視した空間 $\{|\Phi\rangle\}$ で使うべきであり、空間を広げてより厳密な対角化をすれば、真の状態 $|\Psi\rangle$ が得られるわけではない。また、1体演算子の物理量はそのまま計算できるが、2体以上の相関が効く物理量を計算するときには、演算子を繰り込んでから計算するなど注意が必要となる。この Brückner-Hartree-Fock 理論により、原子核の定性的な理解は

格段に進んだが、定量的にはまだ課題が残っている。定量的な第一原理計算は今なお原子核理論の大きな課題と言える。Negele 達は、この有効核力に局所密度近似と変分法を組み合わせることで、Skyrme-Hartree-Fock とほぼ同型の、密度依存力による平均場理論を導き、原子核の飽和性などを定量的に再現できることを示した (Ring-Schuck の教科書を参照)。これにより、核子散乱の位相のずれを再現する生の核力を用いた量子多体問題から出発して、現象論的な有効相互作用を用いた平均場計算への道筋が (一応) ついたことになる。

ここで話を原子核の変形の問題に戻そう。上の議論をふまえると、どの原子核でどのような変形が実現しているかを理論から求めるためには、現象論的な有効相互作用 (例えば、Skyrme force、Gogny force など) から出発して、Hartree-Fock(-Bogoliubov) 方程式を解き、平均場を求めればよいということになるだろう。あるいは平均場計算とほぼ同値かつより簡便な方法として、Strutinsky 法、あるいは shell correction 法と呼ばれる方法がある。これは、現象論的変形平均場である Nilsson ポテンシャルや Woods-Saxon ポテンシャルを用いて変形を決める方法で、現象論的ポテンシャルが HF ポテンシャルの良い近似になっている限り平均場と同値と見なせる。変形を取り入れた微視的な平均場計算が比較的容易にできるようになった現在においても、この方法は、原子核変形の原因を直観的に理解できる点において重要な意味を持つと思う。ここで大ざっぱにその方法を述べる (詳細については例えば Ring-Schuck の教科書を参照)。まず、原子核のエネルギーを質量公式で表現されるような粒子数の関数として滑らかに変化する部分 \tilde{E} とそれ以外 E_{sh} に分け、

$$E = \tilde{E} + E_{\text{sh}} \quad (16)$$

\tilde{E} を液滴模型から、 E_{sh} を先ほどの現象論的平均場から計算する。後は、(16) 式を最小にするように、基底状態の変形度を決めればよい。液滴エネルギーの \tilde{E} が原子核のほとんどのエネルギーを担っており、 E_{sh} はそこからのわずかなずれを表している。 \tilde{E} は変形度の関数としてゆるやかにのみ変化し、なおかつ常に球形で最小のエネルギーをもつ。したがって、原子核の変形を決めているのは実は E_{sh} の方なのである。これは殻構造 (shell structure) に由来するエネルギーで、「殻エネルギー」(shell energy) と呼ばれ、粒子がポテンシャル中の軌道をどこまで占有しているかによって激しく変化する。大雑把に言えば、準位密度の低い状態がエネルギーを得する構造になっている。原子核は閉殻においては球形、開殻において変形する、といった大局的な性質はこれで理解できる。量子力学においてポテンシャル中の一粒子エネルギーが離散的かつそのレベル密度に濃淡があることが、この E_{sh} の起原であり、その意味で原子核の変形は量子効果の現われとも言える。こ

の shell correction 法もまた、原子核理論の大きな成果の一つで、物性物理にも応用され成功を収めている。

さて、原子核は有限系であるから、残留相互作用を含めた全ハミルトニアン基底状態は対称性を破った状態 $|0'\rangle$ として安定に存在することはできず、角運動量を良い量子数としてもつ。このため、平均場が回転対称性を破った場合、 $|0'\rangle$ は残留相互作用により回転する。残留相互作用が h_{sp} に比べて弱ければこの回転は核子の運動にくらべてゆっくりとした運動になると予想される。この対称性を回復させる集団運動を「南部-Goldstone モード」と呼ぶが、原子核は無限自由度系ではないため有限のエネルギーをもち、基底状態も完全には縮退しない。また、対称性の破り方(内部状態の対称性)に応じて、一部の回転自由度が内部自由度に吸収されて、回転スペクトルのスピン・パリティなどに制限がつけられ、例えば、偶-偶核の基底バンドに普通現れる $0^+, 2^+, 4^+, \dots$ といったスペクトルは、軸対称性と対称軸に垂直な軸まわりの 180° 回転 (\mathcal{R}) 対称性をもった平均場からつくられる $K = 0$ のバンドに由来する(平均場の対称性と回転スペクトルの関係については Bohr-Mottelson の教科書を参照)。このように、「変形」と「回転」とは、互いに密接に関係している。

問題 3.1 ここで述べた変形と対称性の回復に伴う回転の役割を見るため、簡単な模型を考えよう。対称性の破れの議論で良く使われるワインボトル型のポテンシャルを考える。 $V(x, y, z) = -Cr^2 + Dr^4$ ($C, D > 0$)。

- (a) 質量 m の粒子がこのポテンシャル内を運動しているとし、極座標 (r, θ, ϕ) で固有値、固有関数を求めよ。但し、ポテンシャルの最小値 $V(r = r_0)$ は十分に深く、その周りで調和近似(2次まで展開)ができるとする。その他の遠心力項や運動エネルギー項では $r = r_0$ の置き換えを許す。
- (b) x, y, z が対称性の破れを記述する秩序パラメータだとすれば、平均場の基底状態は、このポテンシャル $V(x, y, z)$ が最小値を取る点に対応する。 $x = y = 0, z = r_0$ の方向に対称性を破ったとし、この $(x, y, z) = (0, 0, r_0)$ の近傍に質量 m の粒子が存在しているとして、ポテンシャルを $(x, y, z - r_0)$ の2次までに展開し上と同様に Schrödinger 方程式を解くと固有値、固有関数はどうなるか。

対称性を自発的に破り、変形した原子核の回転を早めていくと核構造にどのような変化が起こるか。Morinaga-Gugelot によって提唱された実験(重イオン核融合反応を利用したインビーム γ 線スペクトロスコープ)によって、従来の Coulomb 励起等では到達でき

なかった高スピン状態の研究が実験的に可能になり、原子核構造の研究に「高スピン核構造」という分野が開拓された。(16) 式の \tilde{E} は低スピン領域では原子核を球形に保とうとする力として働くが、角運動量の非常に大きな領域では、回転エネルギーが慣性能率に反比例するため、この力が小さくなり、 E_{sh} のわずかな極小によって、巨大変形状態を実現することが可能となる。したがって原子核の高スピンのフロンティアは、同時に巨大変形のフロンティアとなる。現在、原子核が分裂せずに持つ角運動量として $60 - 70\hbar$ の状態が観測されている。長軸と短軸の比が 2:1 に対応する大きな変形をもつ状態を超変形状態 (superdeformed state) と呼び、90 年代には世界中で盛んに研究され、その特異な構造が理論・実験的に明らかにされた。長軸と短軸の比が 3:1 に対応する大きな変形をもつ原子核も理論的には可能性が示唆されており、“hyperdeformed band” と名付けられているが、実験的にはまだ確定していない (ごく最近その発見を示唆するデータも出ている)。これら巨大変形状態の探求とその構造の研究は、欧米を中心に実験が行われ、理論的にも多くの進展がある。講義では、この話題にも触れたが、紙面の都合上、この講義録では省略する (清水氏による 2000 年の夏の学校講義録を参照されたい)。ここでは次に、対相関とその回転への応答を述べる。

問題 3.2 超変形核 ^{152}Dy の観測された最高スピンは $I = 68\hbar$ 、慣性能率は $\mathcal{J} \approx 85\hbar^2\text{MeV}^{-1}$ 。この高スピン状態の回転の角速度を求め、原子核の表面の速度を評価せよ。原子核全体の回転の速度と平均ポテンシャル内の核子の速度を比較してみよ。

4 原子核の対相関と対相転移

前節で述べた四重極相関に関する自発的対称性の破れの議論において、四重極演算子 (13) を対演算子 $P = \int d^3r \hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r})\hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r})$ に置き換えることで、対相関に関する議論も全く同様に展開できる。すなわち、クーパー対 ($J^\pi = 0^+$ の、互いに時間反転の状態にある p-p 対、h-h 対) の凝縮によって、ゲージ対称性 (粒子数保存) を破って、BCS 状態が実現するわけで、このとき有限の真空期待値

$$\Psi = \langle \Phi_0 | P | \Phi_0 \rangle \neq 0 \quad (17)$$

をもつようになる (図 1 において、横軸を $|\Psi|$ とみればよい)。フェルミオンである核子がボーズ凝縮できる理由は、前にも述べたように、クーパー対が $B^\dagger = \sum_\mu C_\mu c_\mu^\dagger c_\mu^\dagger$ のように多くのフェルミオン対の重ね合わせになっていることが本質的である。この状態は通常

の空間における変形は意味しないが、ゲージ空間で「変形」している。対称性の回復に關しても同様で、この場合はゲージ角 (gauge angle) に関する回轉 (対回轉) がその役割を果たす。また、この変形度 (秩序パラメータ) は一般に複素数であるが、 $|\Psi| = \Delta/g$ の關係で良く知られたエネルギーギャップ Δ と対相互作用の強さ g に關連している。

BCS 波動関数は、

$$|\text{BCS}\rangle_\varphi = \prod_{\mu>0} (u_\mu + e^{i\varphi} v_\mu c_\mu^\dagger c_{\bar{\mu}}^\dagger) |0\rangle \quad (18)$$

という形で表現され ($u_\mu^2 + v_\mu^2 = 1$)、一様核物質中のクーパー対の波動関数 $\phi(\mathbf{r})$ は適当な近似のもとで、

$$\phi(\mathbf{r}) = \langle \text{BCS} | \psi_\uparrow(\mathbf{r}) \psi_\downarrow(0) | \text{BCS} \rangle \sim \left(\frac{\sin k_F r}{k_F r} \right) K_0 \left(\frac{r}{\xi_0 \pi} \right) \quad (19)$$

となる ($K_0(x)$ は第 2 種変形 Bessel 関数)。 $\xi_0 = \hbar v_F / \pi \Delta$ はコヒーレンス長 (coherence length) と呼ばれ、クーパー対の大きさを表している。原子核において典型的な値 $k_F = 1.35 \text{ fm}^{-1}$ 、 $\Delta = 1 \text{ MeV}$ を使うと、 $\xi_0 \approx 17 \text{ fm}$ となり、これは原子核の直径よりも大きな値となる。したがって、原子核における対相関は、むしろ原子核の大きさでクーパー対の広がりが制限されているといえる。これは、量子ドットなど、メゾスコピック系 (mesoscopic system) と呼ばれる系に特有の關係である。このような系においては、無限系のような急激な相転移は実現せず、ゆっくりと転移することが予想され、転移途中の状態を觀測することが可能になる。

問題 4.1 BCS 状態 (18) において、 u_μ, v_μ を実数に取ったとき、 φ がゲージ角に対応する。このとき、

$$|\text{BCS}\rangle_\varphi = \exp(i\varphi \hat{N}/2) |\text{BCS}\rangle_{\varphi=0}$$

を示せ。つまり、粒子数演算子 $\hat{N}/2$ が角運動量演算子の役割を果たし、“回轉励起” とは、粒子数を 2 変化させた隣の原子核に移ることに對應する。

問題 4.2 Bogoliubov 変換

$$a_\mu = u_\mu c_\mu - v_\mu c_{\bar{\mu}}^\dagger, \quad a_{\bar{\mu}} = u_\mu c_{\bar{\mu}} + v_\mu c_\mu^\dagger,$$

により準粒子 (quasi-particle) を定義すると、フェルミオンの交換關係

$$\{a_\mu, a_\nu\} = 0, \quad \{a_\mu, a_\nu^\dagger\} = \delta_{\mu\nu},$$

が成立ち、BCS 状態はゲージ角 φ を適当に選べば、

$$|\text{BCS}\rangle_\varphi \propto \prod_k a_k |0\rangle,$$

と書けることを示せ。 $a_\mu|\text{BCS}\rangle = 0$ が成立するため、BCS 状態は準粒子真空 (quasi-particle vacuum) と呼ばれる。HF 状態も BCS 状態の特別な場合 ($u_p = v_h = 1, u_h = v_p = 0$) と見なせるので、やはり準粒子真空である。

BCS 状態では粒子と空孔の本質的な区別がなくなり、HF 状態での 1p1h 励起 $\Omega_{ph}^\dagger = c_p^\dagger c_h$ に対応するものが、2 準粒子励起 $\Omega_{\mu\nu}^\dagger = a_\mu^\dagger a_\nu^\dagger$ になる。残留相互作用を無視すれば、ハミルトニアンは、 $H = \sum_k E_k a_k^\dagger a_k$ 、 E_k を準粒子エネルギーと呼ぶ。ここで、前にやったように、2 準粒子状態間の残留相互作用を対角化すればフォノン励起が記述できそうであるが、この場合は励起モードが粒子数を保存しないため、対回転モードが他の励起モードと混ざってしまうという大きな問題が生ずる。そこで、理論の対称性を保存する準粒子乱雑位相近似 (QRPA) が通常用いられる。QRPA では、粒子数保存を回復する対回転が自動的に他のモードと分離され、ゼロ励起モード解 (南部-Goldstone モード) として得られる。

さて、ここで対相関が回転に対してどのような応答をするか考えてみよう。通常、重い変形核の基底状態は有限のギャップ $\Delta \neq 0$ をもつ超伝導相にあるが、超伝導相では、クーパー対が超流動的振舞を示すため、正常相 ($\Delta = 0$) よりも慣性能率が小さくなる。実際の原子核においても、観測された慣性能率は、比較的小さな角運動量状態で剛体値の半分以下である。高スピン状態においては、小さな慣性能率はエネルギー的に損となり、より大きな慣性能率をもつ正常相への転移が期待される。また、コリオリ力によってクーパー対が壊される効果によっても、対相関が弱まることが期待されるが、この効果は 1971 年にストックホルムで実験的に観測され、“backbending” と呼ばれている。その後、同様の現象が様々な核のバンドに観測されて、系統的な解析も可能となった。Garrett 等による解析によると、この backbending を起こす角速度 ω_{bb} は、対ギャップ Δ と、フェルミ面近傍の一粒子軌道のなかで最も大きな角運動量 j を用いて、

$$\omega_{bb} \approx 1.67\Delta/\hbar j \quad (20)$$

と表すことができることが実験データから導かれている。ここで、角速度という量を導入しているが、実験的には、エネルギーの角運動量に関する微分 (差分)、 $\omega \equiv dE/dI$ 、で定義される。

理論では、Inglis によって提唱されたクランキング模型と呼ばれる模型による解析が一般的である。高速で回転する原子核の内部状態を記述するため、ハミルトニアンを回転系におけるものに置き換える (ここでは x 軸回りの一様回転を仮定する)。

$$H' \equiv H - \omega_{\text{rot}} J_x \quad (21)$$

この H' が、角速度 ω_{rot} で回転する原子核の内部構造を支配しているハミルトニアンと解釈できる。(21) 式の第二項に、コリオリ力や遠心力の効果が含まれている。また、この項は時間反転対称性を破るため、ちょうど超伝導体に磁場を外場として作用させた場合に類似している。 $H = h_{\text{sp}} + V_{\text{pair}}$ として、適当な一粒子ハミルトニアンと簡単な対相関相互作用を用いて HFB 計算を行った結果の一例を図 2 として示す。このような H' の固有エネルギーを普通のエネルギーと区別して“routhian”と呼ぶ。角速度 $\omega_{\text{rot}} = 0$ では約 1 MeV の対ギャップ Δ が存在するため、準粒子スペクトルは全て 1 MeV 以上にしか存在しない。励起状態は、残留相互作用を無視する限り、2 準粒子励起に対応し、その励起エネルギーは 2Δ よりも大きいはずである。現実の偶・偶核においても、残留相互作用が重要になる集団的な状態を除けば、励起エネルギーに大きなギャップが存在している。図 2 から明らかなように、このギャップは回転を早めることによりある角速度 ($\omega_1 = \omega_{\text{bb}}$) で消える。この角速度よりも高速な回転の下では、2 準粒子励起状態の方が準粒子真空の状態よりも回転系でのエネルギーが低くなり、真空中のひとつのクーパー対が壊されることを意味する。このように回転に対して特に敏感な軌道は、その軌道の持ち得る最大の角運動量をすべて回転方向に整列させたと考えられるので、その大きさはおよそ $j + (j - 1)$ と予想される。スピン整列によって得をするエネルギー $\hbar\omega_{\text{rot}}(j + (j - 1))$ が 2 準粒子励起のエネルギー 2Δ より大きくなるのがこのような真空の転移には必要となる。つまり、backbending の起こる角速度 ω_{bb} は、

$$\omega_{\text{bb}} \approx \frac{\Delta}{\hbar(j - 1/2)} \quad (22)$$

となり、係数を除いて経験式 (20) と良く一致する。 $\omega_{\text{rot}} \geq \omega_{\text{bb}}$ の領域であっても、すべてのクーパー対が壊されているわけではなく、超伝導状態のコヒーレンスは残っているため、この角速度 ω_{bb} を正常相への転移点とみることはできない。むしろ、励起スペクトルからギャップが消えるため、物性物理で“gapless superconductivity”と呼ばれるものに対応する現象である。

相転移近傍においては、コヒーレンス長が大きくなり、ギャップの揺らぎが大きくなる。この揺らぎの効果を動的対相関 (dynamical pairing correlation) と呼び、通常の BCS の意味での対相関を「静的対相関」と表現することがある。慣性率是对相関の変化に非常に敏感な量なので、間接的に対相転移の情報を与えてくれる。また、超変形回転バンドは、まさに対相転移の領域にあり、この種の研究に貴重なデータを提供してくれる。実際、超変形バンドの崩壊にこの転移が強く関与していることが示唆されている。

動的対相関は、原子核に別の種類の振動状態をもたらしている。空間における形を秩序パラメータとして図 1 をみれば、このパラメータが揺らぐことで、原子核に振動励起がう

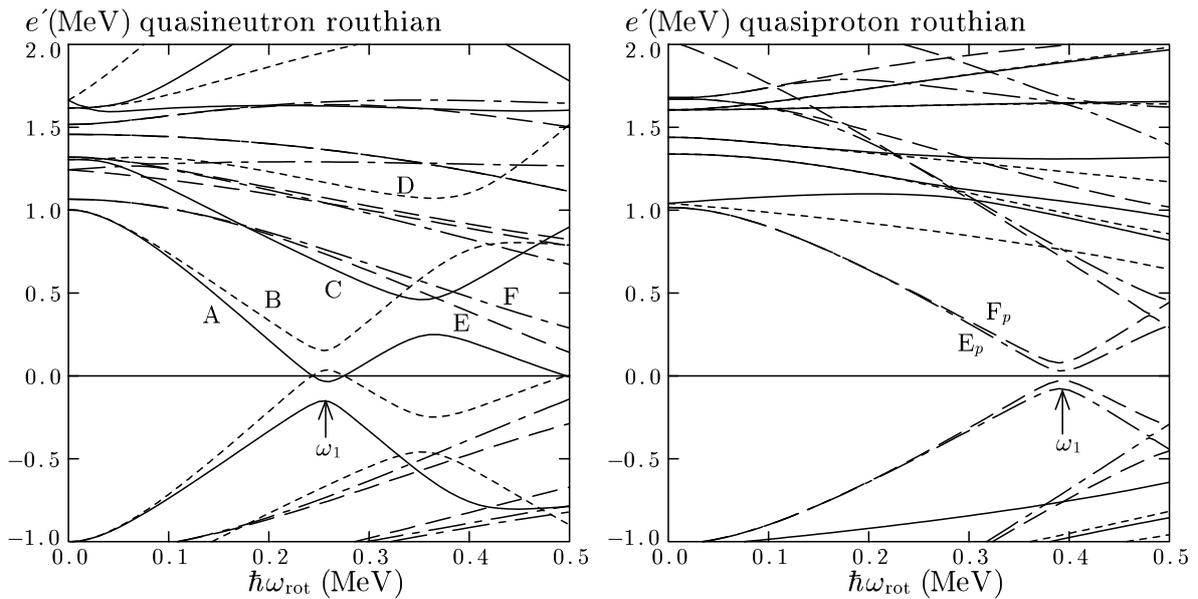


図2 回転系での準粒子エネルギーを回転の角速度の関数としてプロットしたもの。準粒子 routhian とも呼ばれる。対象とした原子核は ^{164}Er 。 ω_1 と書かれているのが本文中の ω_{bb} に対応する。(左) 中性子、(右) 陽子。参考文献の清水良文氏の夏の学校講義録から抜粋。

まれる。同様に、ゲージ空間での変形 $|\Psi\rangle$ を秩序パラメータとして図1を見れば、このパラメータが極小点の回りで揺らぐことで、別の振動状態が現れることも理解できるであろう。これを、対振動 (pairing vibration) 励起と呼ぶ。これはギャップ Δ の値が揺らいでいるような状況であり、その励起状態は、対回転の場合と同様、陽子や中性子数が2だけ違う原子核に現れる。

5 原子核集団運動論の課題

ここまで、いくつか典型的な集団運動とその定性的な理解を目的として議論を進めて来た。最近の成果についても講義では触れたが、本講義録では残念ながら頁数に余裕がなく、ほとんど述べることができなかった。最後に、講義で議論した大振幅集団運動の理論について、その理論の中身ではなく、簡単にその問題意識を述べておく。

そもそも原子核物理の本格的な幕開けは、核分裂という現象が発見されたことにあって言うてもいいかもしれない。核分裂は原子力をはじめとして今日多くの応用を実現している。しかしながらその基礎的理解は実はまだまだ曖昧なものである。微視的に核分裂現象を記述する理論は今だ存在しない。原子核は一体どのように形を変化させ分裂を起こして

いるのか、そのメカニズム、分裂までの崩壊経路は未だ謎である。核分裂を起こすような大きな原子核では、集団座標、集団空間と呼ばれる小さな部分空間で核分裂現象を記述するのが最も賢明であると考えられるが、その部分空間が自明でないということが大きな困難である。このような低エネルギーの集団運動には、対相関と準位交差が非常に重要な役割を果たしていることが分かってきているが、これらを取り入れた微視的なモデルはまだ現実の問題に適用できる段階に来ていない。

困難のもうひとつは、その部分空間における系のダイナミクスを記述する集団ハミルトニアン²の導出、特に、集団質量を微視的な観点から導くことにある。集団運動の質量パラメータの問題は古く、古典的な液滴モデルでは説明できないことが知られている。ここでもまた対相関は重要な役割を果たしており、実験的にも、偶・偶核よりも奇核の方が形を変えにくい、といったことが核分裂の寿命から見て取れる。マクロなモデルに限界があることは明らかで、ミクロなレベルからの解明が必要とされていることは間違いない。調和近似が良い場合のQRPAの成功を考えると、QRPAで得られる質量パラメータが大振幅運動の場合にもひとつの規準になるかもしれない。

また、講義では触れることができなかったが、弱束縛系での集団運動も面白い課題だと思われる。低密度核物質における相関が生み出す新たな集団運動、連続状態の中に埋め込まれた集団運動、対相関との関係など、現在活発に研究されている。不安定核の研究は、実験的に今後も大きく進展する可能性が高く、新しい素励起モードの発見などが期待され、理論からの示唆も重要な課題と言える。

集団運動の理論、特に平均場をこえる相関を取り入れる理論は、原子核物理が量子多体系の理論において大きな寄与を為した分野であり、美しい体系をもつ。これらの成果を多体系の物理として広い観点からその意義を見直し、より一般的な理論として整備していくことも重要な課題といえるだろう。

6 参考文献

この講義録では、その導入的な性格もあり、内容に関してひとつひとつ文献を挙げることを省略した。本文中にも引用した教科書やレビューについて、ここでリストしておくので興味のある方は参考にして欲しい。

原子核集団運動論一般

1. P. Ring and P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem*, Springer-Verlag (1980).
2. A. Bohr and B.R. Mottelson, *Nuclear Structure Vol.1 & 2*, World Scientific (1998).
3. J.-P. Blaizot and G. Ripka, *Quantum Theory of Finite Systems*, MIT Press (1986).
4. 高田健次郎、池田清美、「原子核構造論」、朝倉書店 (2002).
5. 市村宗武、坂田文彦、松柳研一、岩波講座現代の物理学 9 「原子核理論」、岩波書店 (1997).
6. 高木修二、丸森寿夫、河井光路、「原子核論」、岩波書店 (1978).

高スピン状態の原子核構造

7. 清水良文、2000 年夏の学校講義録「高速回転および巨大変形の極限状態における原子核構造」およびその中での引用文献、以下のサイトよりダウンロード可能。
<http://www.nt.phys.kyushu-u.ac.jp/shimizu/download/natsuk.ps.gz>

大振幅集団運動論

- 上記の 1、4、5 および
8. G. Do Dang, A. Klein, N.R. Walet, *Phys. Rep.* **335**, 93 (2000).