

# 原子核物理入門

中務 孝

筑波大学 計算科学研究センター 原子核物理研究部門  
理化学研究所 仁科加速器研究センター 中務原子核理論研究室

2014.8

## 1 はじめに

2011年は、原子核発見から100年という記念すべき年でした [1]。これは、ラザフォード (Ernest Rutherford) が執筆した1911年の論文 [2] から100年にあたることによります。その後の100年で、人類の原子核への理解は大きな進歩を遂げましたが、原子核は非常に量子性が強く、その相互作用である核力は特異な性質をもつため、今なお多くの未解決問題があります。さらに近年の実験技術の進歩とともに新たな課題・謎が現れてきています。これらの問題に理論的にチャレンジするため、量子多体系の理論を駆使した大規模な数値計算を行ったり、新たな有効モデルを開発したりといった研究が現在世界中で行われています。これら最先端の研究内容にも講義の最後には少し触れたいと思いますが、量子多体系の理論の簡単な解説には場の理論を使った記述がどうしても必要で、内容をきちんと解説することは困難です。今回の講義は2コマ、対象が学部3年生ということですので、古典力学と初歩的な量子力学の知識で理解できる内容で、原子核の姿にできるだけ迫ってみようと思います。まず2節で100周年を迎えた原子核の発見の話をして、3節では原子や原子核の世界では量子力学がいかに重要であるかを簡単に説明します。続いて、4節は準備として量子力学の1次元井戸型ポテンシャルの問題です。5節では、4節の結果を使って、アルファ崩壊、中性子散乱断面積、中性子共鳴の実験データから原子核の性質についてどういうことが分かるのかを考えます。最後の6節では、Bohr-Mottelson等によって発展させられた統一モデルと対称性の自発的破れについて簡単に考察します。内容の理解を助けると思われることを演習問題として挿入しました。ぜひ解いて

みてください。

## 2 原子核の発見

19世紀末のフランスでは、ウラン鉱石から何かが発出されていることを発見したベクレルに続いて、キュリー夫妻によってラジウムやポロニウムといった放射性の新元素が発見されていました。放射能 (radioactivity) という言葉はこのとき作られています。放射線が分子ではなく、原子そのものから放出されていることまで彼らは突き止めていました。20世紀になり、この放射線の一つである $\alpha$ 粒子を使った実験が100年程前のイギリス・マンチェスター大学において行われました。ラザフォードの指導の下、Geiger と Marsden が金膜に $\alpha$ 粒子を当てる実験を行い、驚くべき発見をします。それは、後のラザフォード自身の言葉を借りれば、  
It was quite the most incredible event that has ever happened to me in my life. It was almost as incredible as if you fired a 15-inch shell at a piece of tissue paper and it came back and hit you.  
というものです。現代の物理学を知る我々には想像できない驚きであったようです。

当時、多数の電子が原子の中に安定な状態で静止している状況が実現でき、おおよその原子の大きさである $1\text{\AA}=10^{-10}\text{ m}$ と矛盾せずに、原子が放出する光の振動数をうまく説明するように考え出されたのが、トムソンの原子モデルです。同じ頃、日本の長岡半太郎による土星型原子モデルも提案されましたが、古典力学で考える限り、原子全体に一様に正の電荷が分布したトムソン模型の方が色々な点で優れていたため、ヨーロッパではこれが主流の考え方でした。

ラザフォードは実験は失敗すると考えていて、学生であった Marsden の訓練としてやらせたようです。実験は、ラドン ( $^{222}\text{Rn}$ ) からの放出される約 5.5 MeV (MeV は 100 万電子ボルト) の  $\alpha$  線を使って、薄い金の膜 (金は原子番号  $Z = 79$ ) に衝突させて、後方に散乱してくる  $\alpha$  粒子を検出するというものでした。トムソン模型に基づいて、電子の 2 倍の正電荷 ( $Z = 2$ )、約 8 千倍の質量をもつ  $\alpha$  粒子が高速で衝突したときに何が起きるか考えてみて下さい。原子の中に電子が一様に分布していると考え、どこを切り取っても電氣的に中性ですから、クーロン力による散乱はほとんど起きないと予想されます。また、原子の中の電子が個別的に  $\alpha$  粒子と衝突したとしても、電子は圧倒的に軽いので  $\alpha$  粒子はまったく影響を受けないでしょう。そうすると、後方に散乱させるためには、小さな角度の散乱を何度も繰り返す必要があり、その確率はとてつもなく小さいものになってしまう、実験では観測されないはず、というのがラザフォードの予想でした。まさに、「fired 15-inch shell at a piece of tissue paper」という状況で、跳ね返る訳がないのです。ところが、Marsden は跳ね返った  $\alpha$  線を観測して、Geiger は驚いてラザフォードに報告したそうです。皆さんの中にも将来物理学の研究を志す人がいると思いますが、このような驚きに出会えることは研究者にとって喜びです。

問題 1：仮想的に電子が完全に剥ぎ取られた金の原子 ( $Z = 79$ ) を考える。これがクーロン力によって  $\alpha$  粒子に対して最大の反発を与えられる。5.5 MeV の  $\alpha$  粒子はこれでも簡単にすり抜けてしまうことを示せ。

Geiger-Marsden はさらに実験を重ねて、(1) ターゲット (金属膜) を変えると、反射される  $\alpha$  線の数は金属の原子番号が大きいくほど増加すること、(2) 金属膜を重ねて厚くしても、ある厚さ以上では後方散乱される  $\alpha$  粒子が増加しないこと、を確認して 1909 年に論文を発表します。ラザフォードはその 2 年後に、上記の記念すべき論文 [2] で、これらのデータは原子核が原子の中心に存在することを意味すると結論し、原子核の大きさの上限を示しました。ここで 100 年前に戻ったつもりで、Geiger-Marsden のデータから原子核の大きさを見積もって下さい。点電荷のクーロンポテンシャルによる散乱問題 (現在では「ラザフォード散乱」と呼ばれます) を古典

力学で真面目に解いてもいいですし、もっと簡単にオーダーを見積もっても構いません。

問題 2：標的である金 ( $Z = 79$ ) は  $\alpha$  粒子 ( $Z = 2$ ) と比較して十分に重いと考え、入射  $\alpha$  粒子のエネルギーを  $E = 5.5$  MeV とする。後方散乱が起きるための、原子核の大きさの上限を概算で求めよ。

答の求め方によって数倍の違いはあるかもしれませんが、およそ  $4 \times 10^{-4}$  Å になると思います。少なくとも、原子核の大きさは原子のサイズよりも 4 桁小さいということになります。

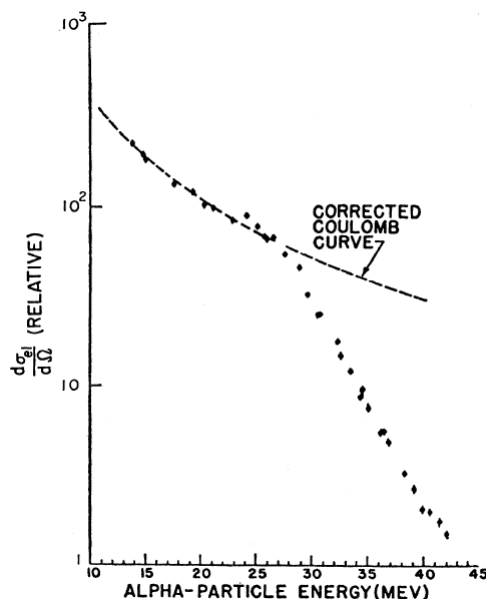


図 1: 散乱角  $\theta = 60^\circ$  における鉛 ( $Z = 82$ ) による  $\alpha$  粒子の弾性散乱断面積。点線は  $Ze$  の点電荷を仮定した場合のラザフォード断面積。金 ( $Z = 79$ ) の場合もほぼ同じ結果が得られている。文献 [3] より。

加速器を使って入射粒子のエネルギーを変化させることができるようになると、例えば図 1 のような測定が可能です。点線がターゲットの原子核が点電荷であると仮定した場合の断面積のエネルギー依存性ですが、 $\alpha$  粒子のエネルギーが  $E \approx 27$  MeV を越えると、この予想曲線から大きくずれ始めることが分かります。ラザフォード散乱を古典力学で解いてみて下さい。 $\alpha$  粒子がもっとも中心に近づいたときの原子の中心からの距離は散乱角  $\theta$  の関数として

$$r_{\min} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2E} \left( 1 + \sin^{-1} \frac{\theta}{2} \right). \quad (1)$$

で与えられます。図1は、 $E \approx 27 \text{ MeV}$ での最近接距離あたりまでは点電荷の近似がよいことを示している。鉛(金)の原子核と $\alpha$ 粒子の半径の和はこれよりも小さいと予想できるでしょう。これで、原子核の半径がだいたい  $10 \text{ fm}$  かそれ以下であるということが分かります。フェムトメートル (fm) という単位は原子核物理で通常使われる長さの単位です ( $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m} = 10^{-5} \text{ \AA}$ )。

ラザフォードの業績は、原子核の発見だけに留まりません。彼は1908年には既に別の業績でノーベル賞をもらっていました。さらに、彼に師事した研究者で後にノーベル賞を受けた学者の数は膨大です。彼に影響を受けた物理学者となれば、その数は計りしれないでしょう。高エネルギーの粒子線を使って微細な構造を研究するという素粒子・原子核物理の実験手法は、100年後の現在まで変わらず続けられています。まさに、「原子核物理学の父」と呼ぶにふさわしい人物だと思います。

### 3 原子・原子核と量子力学の発展

原子核を発見したラザフォードは、当然ながら原子核を中心に据えた原子模型を作りました。我々が今日よく見る原子の模型図はこれに基づいたものです。しかしながら、上で述べたように、原子の半径は  $\text{\AA}$  のオーダー、原子核の半径は  $\text{fm}$  のオーダーなので、なぜ原子がそんなに大きいのかという大きな謎が出現します。ラザフォードの原子模型では、 $Z$ 個の電子は原子核からのクーロン力を受けてそのまわりを回っているわけですが、エネルギー的にはより安定な原子核のすぐそばの軌道や原子核内部に入ることを避けて、なぜか原子核からはるかに離れたところを回っていると考えざるを得ません。困っていた彼のところに、原子核発見の翌年の1912年、ボーア (Niels Bohr) がマンチェスター大学に赴任してきます。悩み抜いたボーアは、ラザフォードの原子模型で水素原子の光におけるスペクトル線の波長  $\lambda$  に成り立つパルマー公式 ( $m = 2$ ) やライマン公式 ( $m = 1$ ) といったものを説明するためには何が必要なのかを考えました。

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad R: \text{定数}, \quad m < n: \text{自然数}. \quad (2)$$

そしてプランクが発見した定数  $h$  を使って、これを説明する条件 (量子化条件) にたどり着きます。これが1913年。いよいよ量子力学が原子の世界に登場することになります。

#### 3.1 原子

ボーア自身、古典力学との対応原理を考えたものの、彼の理論が最終的な形であるとは考えておらず、真に正しい理論が明らかになったときには、この理論に導入した仮説は自然に導出されるものだと考えていたようです。現代の我々はそれが量子力学であることを知っています。量子力学の本質を知っていれば、電子が原子核の大きさ (fm) で運動することは不可能であることがすぐに分かります。

必要なのはハイゼンベルグの不確定性原理だけです。水素原子 ( $Z = 1$ ) を考えることにします。 $r_0 = 1 \text{ fm}$  という大きさに電子の運動を閉じ込めたとしましょう。そうすると、位置と運動量の不確定性から電子は不可避的に運動量  $p \sim \hbar/r_0$  程度を持ってしまいます。つまり、電子 (質量  $mc^2 \approx 500 \text{ keV}$ ) の運動エネルギーは

$$T = \frac{p^2}{2m} \sim \frac{\hbar^2}{2mr_0^2} \sim 4 \times 10^3 \text{ MeV} = 4 \text{ GeV} \quad (3)$$

という巨大なものになってしまいます。 ( $T \gg mc^2$  なので、本当は相対論的な式にする必要がありますが、以下の論旨は変わりませんが、) 電子の感じるポテンシャルエネルギーは、せいぜい  $-e^2/r_0 \sim 1 \text{ MeV}$  程度ですから、これでは電子は瞬く間に遠方に飛び去ってしまい、水素原子は壊れてしまいます。

ここで、電子を閉じ込める半径の大きさ  $r_0$  を変化させて、全エネルギーが最小になるようにしてみます。

$$E = T_0 - V_0 \sim \frac{\hbar^2}{2mr_0^2} - \frac{e^2}{r_0} \quad (4)$$

で、変分条件  $dE/dr_0 = 0$  からすぐに

$$E_{\min} = -\frac{me^4}{2\hbar^2} = -\alpha^2 \frac{mc^2}{2}, \quad \text{at } r_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}. \quad (5)$$

ここで、 $\alpha \approx 1/137$  は微細構造定数、 $r_0$  はボーア半径と呼ばれます。ボーア半径程度に電子の運動が広がることではじめて、(5) 式のエネルギーの値が負になる、つまり電子を束縛することができるので

す。たまたまですが、この荒っぽい見積りで得られた(5)式はシュレディンガー方程式を正確に解いた値と一致しています。

ここで重要なのは、電子波動関数の広がり、電子の零点運動エネルギーを小さくするために必然的に大きくなっているということです。すなわち、量子効果が原子の大きさを決めているのです。(5)式で与えられる $r_0$ を用いて、(4)式中の $T_0$ と $V_0$ を評価すると、

$$\frac{T_0}{V_0} \sim \frac{1}{2} \quad (6)$$

であることが分かります。この運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの比は、量子性の強さを表す指標になります。 $T_0/V_0 \ll 1$ であれば、系を古典的に扱うことが近似的に許されるようになり、粒子はポテンシャルの底の近傍に静止しているという近似が許されます。

クーロンポテンシャルに対するシュレディンガー方程式の厳密解はラゲール多項式を用いて解析的に表現できるため、量子力学は、ボーアが導入した仮説に頼ることなく、水素原子のエネルギースペクトルを見事に説明することに成功しました。この事実は、量子力学の正しさを検証したもので、その後の発展に大きく貢献しました。

---

問題3: 電子の質量が陽子 ( $mc^2 \approx 1 \text{ GeV}$ ) と同じであったら、原子の大きさはどの程度になるか。

---

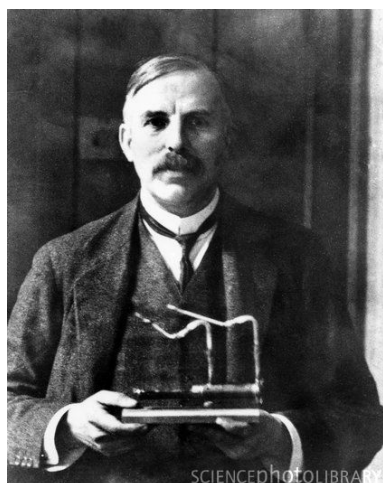
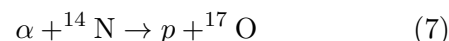


図 2: 人工核変換装置を手に持つラザフォード。  
<http://www.sciencephoto.com/>より。

### 3.2 原子核

次に、ラザフォードは原子核が何から構成されているのかを解明するための研究を開始します。図2のラザフォードの写真を見て下さい。彼が手に持っているのが、彼の作った核変換装置です。当時はこんな小さな装置で原子核物理の最先端の実験をしていたんですね。この中に $\alpha$ 線源と窒素ガスを入れて衝突させ、人工的な核変換に世界で初めて成功します。これが



という反応です。その後Chadwickとともに色々な標的に対して同様の実験を繰り返し、やがて一つの重要な仮説にたどり着きます。それが中性子の存在です。1920年の講演の中で、原子核と非常に短距離でのみ相互作用する電氣的に中性の粒子が存在すれば、色々なデータがうまく説明できることを示しています。電氣的に中性の粒子を見つけることは困難を極めました。やがて弟子のChadwickがこれを果たします(1932年)。中性子は電荷ゼロ、質量は陽子とほぼ同じであることが分かりました。

これで原子核が陽子と中性子(総称して核子)が束縛した系であることが分かりました。その核子を結合させて原子核を作る相互作用、「核力」は、皆さんも知っていると思いますが、日本初のノーベル賞受賞者である湯川秀樹によって解明されました。場の理論と摂動論の知識が必要なため、その中間子論の詳細をここで紹介することはできませんが、粒子(中間子)の交換によって相互作用が働き、その交換する粒子の質量で相互作用のレンジが決まるという基本的アイデアは、現代の素粒子論の標準模型においても変わることなく生きつづけています。湯川の予言した中間子は、10年以上遅れてパウエルが宇宙線の中に発見し、現在はパイ中間子(パイオン)と呼ばれています。この粒子には荷電状態が異なる3種類( $\pi^\pm, \pi^0$ )があつてわずかに質量が異なりますが、およそ $m_\pi c^2 \approx 140 \text{ MeV}$ です。質量 $m$ の粒子が核子から放出されたとき、不確定性関係( $\Delta t \cdot \Delta E \lesssim \hbar$ )より、このような状態は $\Delta t \lesssim \hbar/(mc^2)$ の短い時間しか存在できないので、最大でも $\hbar/(mc)$ 程度の距離にしか到達しないと考えられます。この長さ $\lambda_m = \hbar/(mc)$ をコンプトン波長と言いますが、パイ中間子のコンプトン波

長は、 $\lambda_\pi \sim 1.4 \text{ fm}$  となります。つまり、核力のレンジはおよそこの程度の短距離だと結論付けられます。

問題4：湯川ポテンシャルと呼ばれる次の量のフーリエ変換を求めよ。

$$V(\vec{r}) = \frac{g^2}{r} e^{-\mu r}.$$

ここで、 $\mu^{-1}$  をコンプトン波長  $\lambda_m = \hbar/(mc)$  とした場合と  $m \rightarrow 0$  ( $\mu \rightarrow 0$ ) の極限とを比べることで、質量ゼロの光子が媒介する相互作用 (クーロン力) と有限の質量の粒子が媒介する相互作用とを比較せよ。

では、次に核力のおおよその大きさを見積ってみましょう。我々は、重陽子が陽子と中性子の束縛状態として存在することを知っています。核力の到達距離が  $\lambda_\pi$  程度であることから、再び不確定性原理を使うと、陽子-中性子間の相対の運動量はおおまかに  $p \sim \hbar/\lambda_\pi \sim m_\pi c$  と見積もれます。したがって、零点運動エネルギーは、相対運動の換算質量を  $\mu$  として、

$$T_0 \approx \frac{p^2}{2\mu} \sim 20 \text{ MeV}. \quad (8)$$

換算質量は、核子の質量を  $m_N$  とすると、 $\mu = m_N/2$  です。したがって、重陽子が存在するという実験的事実は、少なくとも  $T_0$  よりも深い引力のポテンシャルが核力にあるということを示唆します。ここから、原子核の典型的なエネルギースケールは MeV という単位で表されるであろうことが予想されます。

湯川にはじまる核力の研究は、核子・核子散乱の詳しい解析を通して精密化されました。現在では核力は以下のような性質をつことが知られています。

1.  $r \gg \lambda_\pi$  のような遠方では、1つのパイ中間子の交換から得られる湯川ポテンシャルで良く記述されます。
2.  $r \lesssim 0.5 \text{ fm}$  の近距離では、強い斥力が働きます。
3. 粒子間の距離のみの関数である中心力  $V(r)$  に加えて、核子スピン・アイソスピンに依存する非中心力が存在します。

近距離で単純な湯川ポテンシャルから大きくずれる理由は、このような近距離では、パイ中間子よりもさらに重い粒子の交換が効いてくるためと考えられます。

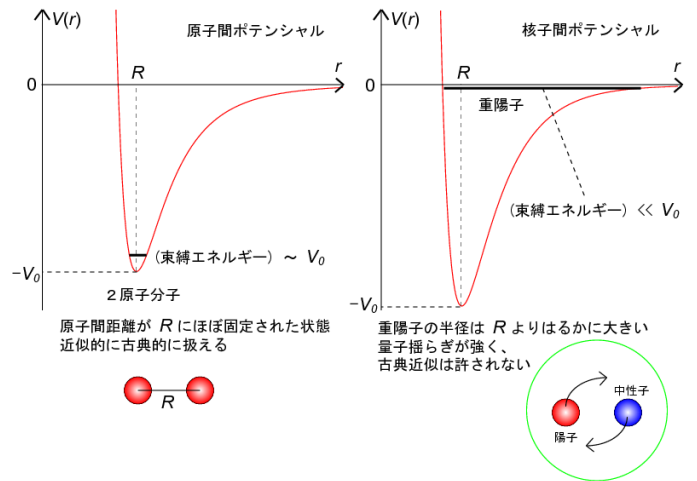


図3: 原子間ポテンシャル(左)と核子間ポテンシャル(右)の模式図。

核力ポテンシャルを模式的に示すと、図3の右図のような形です。左の原子間ポテンシャルと比較すると、その形は良く似ていることが分かります。しかし決定的な違いがあります。それは、量子性の強さです。左の分子の場合は、原子の波動関数はポテンシャルの底の部分に局在しています。したがって、これは古典近似を使うことができ、実際、分子動力学という手法で、原子の運動を古典的に記述する計算手法が確立しています。一方、重陽子の束縛エネルギーはわずかに2 MeV程度で、図のポテンシャルの深さ ( $V_0 \sim 100 \text{ MeV}$ ) に比べると非常に小さな量であることが分かります。(6)式に示した指標で見れば、

$$T_0/V_0 \sim 1 \quad (9)$$

であり、非常に量子性の強い系であることが分かります。強い量子性の帰結として、原子核は極低温において結晶化しない、つまり固体にならずに液体として留まることが予想されます。

問題5：物性では、液体ヘリウムがほぼ唯一極低温で液体に留まる系として知られる。なぜ液体ヘリウムが特別なのか、理由を述べよ。

## 4 1次元の量子力学演習

前にも述べたように、量子力学的多体問題を解くことは様々な困難があつて、大変難しい問題です。

しかし、いくつかの重要な原子核の性質は、簡単な1粒子の量子力学の解の性質から解析することが可能です。ここで、そのための準備として1次元の量子力学演習をやってみます。量子力学を勉強すると誰もが1度は習うのが「井戸型ポテンシャル中の粒子」です。時間に依存しないシュレディンガー方程式

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right\} \psi(x) = E\psi(x) \quad (10)$$

の解の性質を調べてみましょう。

## 4.1 反射と透過

まず、質量  $m$  の粒子がポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{領域 (I) } x < 0 \\ V_0 < 0 & \text{領域 (II) } 0 < x \end{cases} \quad (11)$$

にしたがって運動する系を考察してみましょう。

### 4.1.1 $V_0 < E < 0$ の場合

それぞれの領域内における解は、

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{\kappa x} & \text{領域 (I)} \\ \sin(kx + \phi) & \text{領域 (II)} \end{cases} \quad (12)$$

で与えられます。ここで、 $\kappa = \sqrt{-2mE}/\hbar$ 、 $k = \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar$  で与えられます。エネルギー  $E$  は連続スペクトルで、 $V_0 < -E < 0$  の任意の値が取り得ます。

$x = 0$  における対数導関数の連続性から、 $\phi = \tan^{-1}(k/\kappa)$  が得られ、これが位相  $\phi$  を決定します。次に、 $x = 0$  での関数の連続性から、 $A = \sin \phi$  となり、定数  $A$  も決定されます。このとき、領域 (I) への波動関数の浸み出しの度合いを表す因子  $A$  は、

$$A = \sin \phi = \frac{k}{k^2 + \kappa^2} = \left( \frac{E - V_0}{V_0} \right)^{1/2}. \quad (13)$$

シュレディンガー方程式の解は、定数をかけても同値な解を与えるので、(12) 式は次のように書くこともできます。

$$\psi(x) = \begin{cases} -2iAe^{\kappa x + i\phi} & \text{領域 (I)} \\ e^{-ikx} - e^{ikx + 2i\phi} & \text{領域 (II)} \end{cases} \quad (14)$$

この領域 (II) の解の第一項が入射波、第二項が反射波だと解釈できます。定常状態の波動関数は時間に依存する位相因子  $e^{-iE_k t/\hbar}$  があるためこれを考慮すると、この解の重ね合わせから作った波束中心の動きは、 $v_k = \hbar k/m$  として、入射波は  $x = -v_k t$ 、反射波は  $x = v_k(t - \tau)$  で与えられます。ここで、

$$\tau = 2\hbar \frac{d\phi}{dE} \quad (15)$$

は、反射による時間の遅れを表します。この反射の時間的遅れは量子論に特有の現象です。

(波束中心について)

実関数  $f(k)$  は  $k = 0$  で幅  $\Delta k$  程度のピークをもつ関数とする。平面波  $e^{ikx - i\varphi(k)}$  を  $k$  のまわりで重ね合わせて作った波束

$$\psi_k(x) = \int f(k - k') e^{ik'x - i\varphi(k')} dk'$$

を考える。 $k'$  に関する積分によって、被積分関数の位相が  $k' = k$  の周辺で定常的でない場合は積分は消えると考えられる。したがって波束中心は、 $x = d\varphi/dk|_{k'=k}$  で与えられると考えてよい。

### 4.1.2 $V_0 < 0$ 、 $E > 0$ の場合

この場合は、遠方での振る舞いを決める必要があります。ここでは、領域 (I) には左 ( $x \rightarrow -\infty$ ) の方向に進む波しか存在しないとしましょう。

$$\psi(x) = \begin{cases} Te^{-ik_1 x} & \text{領域 (I)} \\ e^{-ik_2 x} + Re^{ik_2 x} & \text{領域 (II)} \end{cases}. \quad (16)$$

ここで、 $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$ 、 $k_2 = \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar$  で与えられます。ここでもエネルギー  $E$  は連続スペクトルで、 $0 < E$  の任意の値が可能で、

$x = 0$  における対数導関数の連続性から、

$$R = \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2}. \quad (17)$$

領域 (II) の波動関数は、ノルム1の波が右から左へ伝搬して、 $x = 0$  で反射してノルム  $|R|^2$  の波が反対方向へ進んでいると解釈できます。つまり、 $P_R = |R|^2$  は反射率を表します。

次に、 $x = 0$  での関数の連続性から、

$$T = 1 + R = \frac{2k_2}{k_1 + k_2} \quad (18)$$

であることが分かります。領域 (I) へ透過した波は、波数が  $k_2$  から  $k_1$  へと変化し、粒子の速度が変化するため、領域 (II) から (I) へ波が侵入する透過率は、次のように定義できます。

$$P_T = \frac{k_1}{k_2} |T|^2 = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}. \quad (19)$$

特に  $k_1 = k_2$  の極限では、 $R = 0$ 、 $T = 1$ 。  $k_1 \ll k_2$  の場合には、

$$P_R \approx 1 - \frac{4k_1}{k_2}, \quad P_T \approx \frac{4k_1}{k_2}. \quad (20)$$

問題 6: 次の関係が成り立つことを示せ。

$$P_R + P_T = 1. \quad (21)$$

また、透過率  $P_T$  が  $|T|^2$  ではなく、係数  $k_1/k_2$  が必要な理由を述べよ。

## 4.2 トンネル現象と散乱 ( $E > 0$ )

次に、質量  $m$  の粒子がポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{領域 (I) } x < 0 \\ V_0 & \text{領域 (II) } 0 < x < L \\ 0 & \text{領域 (III) } x > L \end{cases} \quad (22)$$

の場合を考えてみましょう。  $E > 0$  の場合を考察することにします。ここでも境界条件が必要ですが、今度は領域 (III) には右向き ( $x \rightarrow \infty$ ) に進む波しか存在しないとします。

$0 < E < V_0$  の場合、解は、

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Re^{-ikx} & \text{領域 (I)} \\ A_2 e^{\kappa x} + B_2 e^{-\kappa x} & \text{領域 (II)} \\ Te^{ikx} & \text{領域 (III)} \end{cases} \quad (23)$$

で与えられます。ここで、 $\kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$ 、 $k = \sqrt{2mE}/\hbar$  で与えられます。また、 $0 < V_0 < E$  の場合、あるいは  $V_0 < 0$  の場合には、領域 (II) の解が以下に変更されます。

$$\psi(x) = A_2 e^{ik'x} + B_2 e^{-ik'x} \quad \text{領域 (II)} \quad (24)$$

で、 $k' = \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar$  です。

透過率 (トンネル確率) は、 $P_T = |T|^2$  で与えられることはすぐに分かると思います。前と同様の手続きで解とその導関数の連続性から以下の答を求めることができます。皆さんも一度解いてみてください。

$$P_T = \frac{4E(V_0 - E)}{4E(V_0 - E) + V_0^2 \sinh^2 \kappa L}, \quad (25)$$

for  $0 < E < V_0$

$$P_T = \frac{4E(E - V_0)}{4E(E - V_0) + V_0^2 \sin^2 k' L}, \quad (26)$$

for  $E > 0, E > V_0$

問題 7: (25)、(26) 式は  $E = V_0 > 0$  のときにゼロになってしまうように見えるが、そうはならない。その値を求めよ。

ここで、(25) 式で、トンネル現象が起こる  $0 < E < V_0$  の場合について考察してみましょう。  $\kappa L \gg 1$  の場合は、 $\sinh \kappa L \approx e^{\kappa L}/2$  と近似でき、分母の第一項は第二項に比べて無視できます。したがって、このとき次のような近似が成り立つでしょう。

$$P_T \approx \frac{16E(E - V_0)}{V_0^2} \exp(-2\kappa L) = \frac{16E(E - V_0)}{V_0^2} \exp\left(-\frac{2L}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}\right) \quad (27)$$

ここでエネルギー依存性に注目し、exponential の前の因子の  $E$ -依存性は exponential に比べて無視できると考え、この部分を 1 と置くと、

$$P_T(E) \sim \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_0^L \sqrt{2m(V(x) - E)} dx\right) \quad (28)$$

と指数関数的な  $E$ -依存性を示すことが分かります。この (28) 式は、定数ではない  $V(x)$  に対して WKB 近似を使って求めたトンネル確率と等しいものです。WKB 近似についての解説は量子力学の教科書に載っていますので、そちらを参照して下さい。

## 5 原子核への簡単な応用例

ここで、前節の結果を使って原子核の性質のいくつかを解析し、原子核を理解する上で、量子効果がいかに重要かを理解することにしましょう。

## 5.1 アルファ崩壊と液体的性質

ラザフォード達が原子核発見に用いた MeV オーダーのエネルギーの  $\alpha$  粒子は、加速器ではなく、放射性元素のアルファ崩壊から出てくる  $\alpha$  線を用いました。アルファ崩壊は偶発的で確率法則に従い、放射性原子核ごとに決まった崩壊確率  $\lambda$  が与えられていることが知られています。この崩壊確率の逆数が平均寿命  $\tau$  であり、よく使われる半減期は  $T_{1/2} = (\ln 2)\tau = \ln 2/\lambda$  で与えられます。

アルファ崩壊する原子核の寿命は様々です。例えば、 $^{238}\text{U}$  の半減期は地球の年齢とほぼ同じ約 50 億年ですが、 $^{212}\text{Po}$  の半減期は 300 ナノ秒という短いものです。同じ現象であるにも関わらず、何十桁もの違いを生み出すメカニズムは何でしょうか。この謎は、George Gamow によって 1928 年に解明されました。量子力学を当時まったくの未知のミクロ物体であった原子核に適用し、古典力学では理解できない現象を解明した画期的な出来事でした。

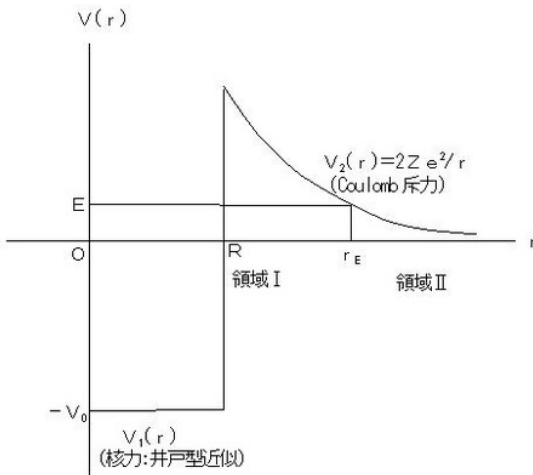


図 4:  $\alpha$  粒子に対するポテンシャルの模式図。

今から見ればアイデアは実に単純です。原子核内部の  $\alpha$  粒子には、核力による引力とクーロン力による斥力が働いています。したがって  $\alpha$  粒子に対するポテンシャルは、原子核表面付近とその外側では主に斥力のクーロンポテンシャル、内部では核力による引力ポテンシャルと考えられ、図 4 のような状況が想像できます。このポテンシャルは核表面付近でピークをもつ障壁を作り出し、これをクーロン障壁と呼びます。他の正電荷をもつ粒子 (例えば陽子) にも同じような障壁が現れます。アルファ崩

壊を起こす重い原子核では、このクーロン障壁の高さは 30 MeV という大きさを持ちます。すなわち、 $E \lesssim 30$  MeV の  $\alpha$  粒子は、古典力学にしたがえば核内に閉じ込めることができるのです。しかし、量子力学ではトンネル効果で確率的に飛び出して来るでしょう。これがアルファ崩壊の姿だと Gamow は考えたのでした。

(28) 式を見て下さい。ここで、座標  $x$  を今の問題の動径座標  $r$  に置き換えて適用してみましょう。核半径を  $R$ 、 $E = 2Ze^2/r_E$  と置くと、

$$P_T(E) \sim \exp \left[ -\frac{2}{\hbar} \int_R^{r_E} \sqrt{2m \left( \frac{2Ze^2}{r} - E \right)} dr \right] \\ = \exp \left[ -\frac{4\sqrt{mZe^2}}{\hbar} \int_R^{r_E} \sqrt{\left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_E} \right)} dr \right] \quad (29)$$

この積分を実行すると、指数関数の引数は、 $x = R/r_E$  として、

$$-\left( \frac{32mZ^2e^4}{\hbar^2E} \right)^{1/2} \left( \cos^{-1} \sqrt{x} - (x - x^2)^{1/2} \right) \quad (30)$$

となります。エネルギーがクーロン障壁の高さに比べて十分低い場合、 $r_E \gg R$  ( $x \ll 1$ ) となるので、(30) 式の後半の括弧の中は  $\pi/2 - 2\sqrt{x}$  と近似できるでしょう。したがって、

$$P_T(E) \sim \exp \left[ -\left\{ \frac{8\pi^2mZ^2e^4}{\hbar^2E} \right\}^{1/2} + \frac{8e\sqrt{ZmR}}{\hbar} \right] \quad (31)$$

崩壊の半減期は、このクーロン障壁の透過率の逆数に比例すると考えられるため、比例定数を  $t_0$  として、

$$T_{1/2} = \frac{t_0}{P_T(E)} \\ \sim t_0 \exp \left[ \left\{ \frac{8\pi^2mZ^2e^4}{\hbar^2E} \right\}^{1/2} - \frac{8e\sqrt{ZmR}}{\hbar} \right] \quad (32)$$

問題 8: 実際に積分を実行し (30) 式を示せ。(factor 等に間違いがあるかも)。

半減期が数十桁も異なるアルファ崩壊ですが、半減期と放出される  $\alpha$  粒子のエネルギーとの間に良



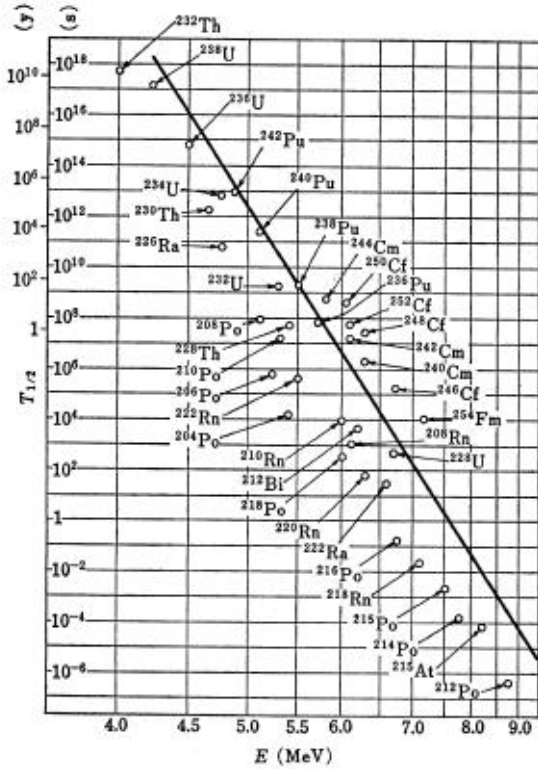


図 5: アルファ崩壊の半減期と  $\alpha$  粒子のエネルギーの関係。

く成り立つ法則があることを、Geiger と Nuttall が 1911 年には見つけていました。図 5 に、半減期と放出される  $\alpha$  粒子のエネルギーとの関係がプロットされています。この図は、 $E^{-1/2}$  に比例するエネルギー依存性がある場合に直線になるように横軸が調整されています。Geiger-Nuttall の法則と呼ばれる式は、

$$\log_{10} T_{1/2} = a \frac{Z}{\sqrt{E}} + b \quad (33)$$

というものです。これは、(32) 式の両辺の対数を取ったものに他なりません。次元のある量の対数をとるのは私の好みではありませんが、(33) 式に従って対数の形にしてみると、定数  $a$ 、 $b$  は次のようになります。

$$a = \log_{10} e \left( \frac{8\pi^2 m e^4}{\hbar^2} \right)^{1/2}, \quad (34)$$

$$b = \log_{10} t_0 - \log_{10} e \frac{8e\sqrt{ZmR}}{\hbar}. \quad (35)$$

図 5 の直線は、平均的な  $Z$  の値をとったものなので、異なる元素 ( $Z$ ) ごとに線をつないでみると、(33) 式

は非常によく精度で成り立っていることが分かります。

Geiger-Nuttall の法則のパラメータが (34)、(35) 式のように与えられたので、図 5 にあるような多数の観測された実験データをもとに逆に核半径  $R$  を求めることができます。その結果は、

$$R = r_0 A^{1/3}, \quad r_0 \approx 1.5 \text{ fm} \quad (36)$$

で良く近似できるというものでした。ここで、 $A = Z + N$  は陽子数と中性子数の和で、核子数あるいは質量数と呼ばれます。この関係式は原子核の体積が質量数  $A$  に比例するというを表していて、言い換えると、内部の核子密度は原子核の種類によらず、おおよそ  $3/(4\pi r_0^3)$  で与えられるということを意味します。この事実を「核密度の飽和性」(saturation of nuclear density) と呼び、原子核の液滴模型をサポートする一つの傍証です。定量的には、上の  $r_0$  の値はやや大きすぎて、その後の  $\mu$  原子のスペクトル解析や次に述べる電子散乱実験などによってさらに詳細に調べられました。

高エネルギーの電子を加速器で作らだし、電子散乱実験によって原子核中の電荷分布を詳細に解明したのは、Hofstadter を中心とするグループです。自然界に存在するいわゆる安定核と呼ばれる原子核については、電荷分布が良く調べられ、図 6 のような結果が得られています。核内の核子密度について次のようなことが分かっています。

1. 原子核の中心付近の密度は原子核によらず一定で、 $\rho_0 \approx 0.17 \text{ fm}^{-3}$ 。「通常密度」(normal density) と呼ばれます。
2. 核子密度分布は、フェルミ分布関数で近似でき、

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{(r-R)/a}}. \quad (37)$$

ここで、 $R = r_0 A^{1/3}$ 、 $r_0 = 1.1 \sim 1.2 \text{ fm}$  で与えられます。

3. 密度分布 (37) 式の表面の厚さを表すパラメータ  $a$  はほぼ一定で、 $a \approx 0.54 \text{ fm}$ 。

原子核にまつわる飽和性は核密度だけではありません。束縛エネルギー  $B = -E$  を調べてみると、1 核子あたりの束縛エネルギー  $B/A$  が原子核によらずほぼ定数であるという性質が明らかになりま

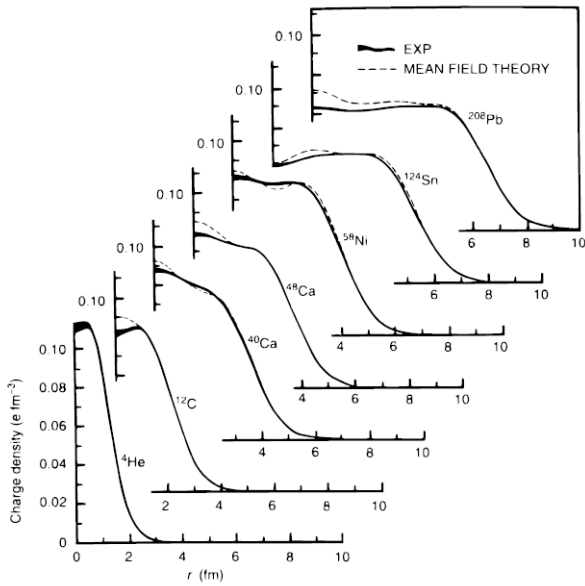


図 6: 電子散乱実験によって測定された色々な原子核の電荷分布。文献 [4] より。

した。密度とエネルギーの飽和性は、原子核を液体として記述する模型の発展を促しました。その中でも最も成功しているのは、Bethe-Weizäcker による質量公式でしょう [5]。原子核の束縛エネルギーを、 $A$ (体積) に比例する部分、 $A^{2/3}$ (表面積) に比例する部分、 $(N-Z)^2/A$  に比例する対称エネルギー、陽子同士の電气的反発によるクーロンエネルギー、対相関による偶奇性に依存する部分、などに分けて記述した単純な式で、驚く程うまく原子核の質量が再現できます。はじめの  $A$  に比例する部分が液体の凝固熱に対応するもので、1 核子あたり、 $B/A \sim 16$  MeV です。原子核の液滴模型は、飽和性だけでなく、原子核の集団運動の記述においても大きな役割を果たしました [7]。

Gamow によるアルファ崩壊のトンネル現象としての記述は、原子核にも量子力学が適用できることを示した画期的な成果で、その後の核物理の発展に大きく貢献しました。また、アルファ崩壊が量子トンネル効果であれば、その逆にクーロン障壁以下のエネルギーの荷電粒子で核変換反応を起こすことも可能だろうと予想され、その後の加速器による核反応研究を推進する契機にもなっています。実際、ラザフォードは 3.2 節で述べたように  $\alpha$  線源を使って人工核変換に成功した後、加速器を使った研究へ力を注ぎました。そしてラザフォードの強力な支援

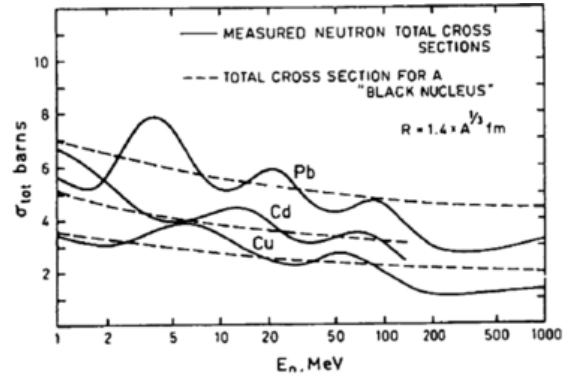


図 7: 鉛、カドミウム、銅の原子核にエネルギーを変化させた中性子を入射し測定された中性子散乱の全断面積。断面積の単位 barn は  $100 \text{ fm}^2$ 。文献 [5] より。

の下、1932年に Cockcroft と Walton が加速器による人工核変換に成功します。これは Li に 500 keV 程度に加速された陽子を衝突させたもので、クーロン障壁よりも低いエネルギーで起こしたものです。

問題 9:  $p+{}^7\text{Li}$  の反応におけるクーロン障壁のおおよその高さを見積もれ。

## 5.2 中性子散乱と気体的性質

原子核に中性子を照射すると何が起きるでしょうか。弾性散乱に加えて、捕獲反応 ( $\gamma$  線や  $\alpha$  線を放出して中性子を捕獲する反応) があり、場合によっては原子核が 2 つに分裂してしまう核分裂も起きます。ここでは、これらすべての反応の断面積をすべて足し合わせた中性子散乱の全断面積についてみてみましょう。図 7 に、実験データを集めた結果を示します。

この図から分かることとして、まず断面積の大きさが簡単な予想よりも数倍大きいことが分かります。中性子は電荷を持たないので、遠距離で相互作用するクーロン力が働きません。したがって、ラザフォード散乱のような大きな断面積は持たず、古典力学で予想すれば、核半径を  $R$  として  $\sigma_{\text{tot}} = \pi R^2$  程度と考えられます。この大きさを見積もって下さい。図 7 の値より相当小さいはずですが、この振舞いも古典的に理解することは難しいのです。さらに特徴的なのは、全断面積がエネルギー

の関数として振動していることです。これはどのように考えられるでしょうか。古典的に理解することはほぼ不可能です。古典力学の散乱問題は、粒子がどの軌道 (衝突係数) で入射してきたかで散乱が決定されるため、全断面積にこのような特徴的なエネルギー依存性をつくるメカニズムが考えにくいのです。ところが量子力学では、どちらも起こり得ることなのです。皆さんはまだ量子散乱問題には慣れていないと思いますので、ここでは簡単に定性的な話で説明したいと思います。

問題 10: 半径  $R$  の井戸型ポテンシャルの古典散乱断面積を求めよ。角度積分した全断面積はエネルギーによらず  $\pi R^2$  になることを確かめよ。

まず、図 7 の点線を見て下さい。“black nucleus” と図に書かれていますが、これは半径  $r = R$  で内向きの境界条件を課してシュレディンガー方程式を解くことに対応します。その意味は、中性子が一度核内 ( $r < R$ ) に入り込んだら二度と出られないと考えるということです。この考え方は、次節のボーアの複合核模型のアイデアと合致します。図から分かるように、この考え方で大体の大きさと、エネルギーとともにゆるやかに断面積が現象することは再現できています。これは、中性子が de Broglie 波長で特徴付けられる長さの位置の不確定性をもつために断面積は  $\pi R^2$  よりも大きくなるからです。しかしもう一つの特徴である特徴的な振動パターンは現れません。これは、波のもう一つの特徴である干渉効果によって産み出されていると考える他なさそうです。

1次元問題で考察した井戸型ポテンシャルの透過率 (26) 式を参考にして考えてみましょう。今、入射する中性子のエネルギーは  $E > 0$ 、核内では核子を束縛するポテンシャルがあるでしょうから、 $V_0 < 0$  という状況が想定できます。(26) 式の分母に  $V_0^2 \sin^2 k'L$  という項があるので、透過率はエネルギーの変化に対して、 $[1 + V_0^2 / \{4E(E - V_0)\}]^{-1}$  と 1 の間を振動します。この透過率の振動も干渉効果と理解できます。左からやってきた波は  $x = 0$  を透過し、距離  $L$  だけ進んだ  $x = L$  で再び透過した第一の波、 $x = L$  で反射、 $x = 0$  で再反射、 $x = L$  で透過した第二の波があり、この第一と第二の波は  $x > L$  で干渉するでしょう。実際には、領域 (II) を往復する回数を増やした無限個の波が干渉してい

ます。この考えに基づいて透過率を実際に計算してみましょう。

注意すべきことは、異なる経路の“確率”を足し合わせて計算してはいけないということです。ここでは干渉は起こりません。振幅を足し合わせて計算し、最後にそれを 2 乗して確率を出します。まず、 $x = L$  を透過する第一の波は、

$$T_{1 \rightarrow 2} e^{ik'L} T_{2 \rightarrow 3} \quad (38)$$

という振幅を与えます。ここで、領域 (i) から (j) への透過振幅を  $T_{i \rightarrow j}$  と記しています。領域 (II) を余計に 1 往復した第二の波は、 $x = L$  で

$$T_{1 \rightarrow 2} e^{ik'L} R_2 e^{ik'L} R_2 e^{ik'L} T_{2 \rightarrow 3} \quad (39)$$

という振幅を持ちます。 $R_2$  は領域 (II) における反射振幅を表します。ここで、波が進んでいる間の位相の変化 ( $e^{ik'L}$ ) を取り入れて計算する必要があることに注意してください。これがないと干渉が現れません。このようにして、これらを無限に足し合わせていくと、

$$\begin{aligned} T &= T_{1 \rightarrow 2} e^{ik'L} T_{2 \rightarrow 3} \left\{ 1 + (R_2)^2 e^{2ik'L} \right. \\ &\quad \left. + (R_2)^4 e^{4ik'L} + \dots \right\} \quad (40) \\ &= e^{ik'L} T_{1 \rightarrow 2} T_{2 \rightarrow 3} \left\{ 1 - (R_2)^2 e^{2ik'L} \right\}^{-1} \end{aligned}$$

となり、これが透過率を与える振幅になります。(18) 式より  $T_{1 \rightarrow 2} = 2k / (k + k')$ 、 $T_{2 \rightarrow 3} = 2k' / (k + k')$ 、(17) 式より  $R_2 = (k' - k) / (k + k')$  と分かるので、これを代入して計算します。(19) 式をここでは  $P_0$  と書くことにすると、結果は

$$T = e^{ik'L} P_0 \left\{ 1 - (1 - P_0) e^{2ik'L} \right\}^{-1} \quad (41)$$

となります。 $P_T = |T|^2$  を計算すると、確かに (26) 式に一致します。これで、(26) 式の振動的振舞いの起源が、異なる経路の足し合わせからくる干渉であることが明白です。ここで示した振幅の計算法は、量子力学を経路積分という形で定式化した Feynmann のアイデアの特別な場合と見ることができます。経路積分の考え方では、量子力学における 2 つの状態間の遷移振幅があらゆる可能な経路を足し合わせることで求められます [6]。

問題 11：ここと同様のやり方で反射の振幅  $R$  を計算し、反射率  $P_R$  を求めよ。また  $P_T + P_R = 1$  を確かめ、計算の正しさを検証せよ。

ここで中性子散乱の断面積に戻しましょう。“black nucleus”として原子核を記述すると、原子核の中に入った中性子は外に出てこられません。一方、ポテンシャルによる散乱のように、核内に入った中性子が外に出てくることができれば、もとの入射波と核内を通過して外へ出てきた波との間に干渉が起り、図7のような振動パターンが現れるのです。

1次元の井戸型ポテンシャルでは、干渉を起こす波と波の間の位相差が  $e^{2ik'L}$  の整数倍でした。これが振動の周期の元になっていることは明らかでしょう。現実の散乱は3次元空間で起きているため全く同じではありませんが、似たような解析が可能です。この場合は、核内を通らなかった波と核内を通過した波の位相差が問題になります。原子核の外では  $k^2 = 2mE/\hbar^2$  で、核内では中性子が引力のポテンシャル  $V_0 < 0$  を感じているとすると、 $k_{\text{in}}^2 = 2m(E - V_0)/\hbar^2$  に波数が増加します。原子核の直径を  $2R$  とすると、位相差はおおよそ  $e^{i2(k_{\text{in}} - k)R}$  になると考えられます。原子核の半径  $R$  は  $r_0 A^{1/3}$  で近似的に決められるので、図7の振動の周期(波長)から  $k_{\text{in}} - k$  の大きさ、すなわちポテンシャルの深さ  $V_0$  を見積もることができます。

定性的には図7の振舞いをこれでおおよそ理解できましたが、定量的に断面積の振動の振幅の大きさを再現するためには、通常の実数のポテンシャル  $V(\vec{r})$  だけではうまくいきません。干渉効果が強すぎて、振動の振幅が大きくなりすぎるのです。一方で、“black nucleus”の近似では干渉効果が見えなかったのが、現実はこの中間だろうと予想できます。つまり、核内に入った中性子はある有限の確率でターゲットの原子核の内部自由度(核子の運動や集団運動等)を励起させ、中性子はエネルギーを失い“吸収”されます。この効果を複素ポテンシャルとして取り入れたのが、光学模型です。

複素数のポテンシャルの意味は時間依存シュレディンガー方程式で理解できます。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \left\{ \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) - iW(\vec{r}) \right\} \psi(\vec{r}, t). \quad (42)$$

$W(\vec{r}) = 0$  であれば、ハミルトニアンはエルミートで、連続の式を満たすことはよく知られていますが、 $W \neq 0$  のときには、

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = -\frac{2}{\hbar} W(\vec{r}) \rho(\vec{r}, t) \quad (43)$$

と変更されます。これは、中性子が単位時間あたり  $2W(\vec{r})/\hbar$  の確率で原子核との相互作用でエネルギーを失うことを表しています。エネルギーを失った中性子は弾性散乱としては“失われた”と見ることができ、これを減衰として近似的に扱うのが、光学ポテンシャルなのです。この原子核の内部自由度との“衝突率”の逆数が、核内で中性子が衝突するまでの平均時間

$$\tau_{\text{coll}} = \frac{\hbar}{2W(\vec{r})} \quad (44)$$

を表します。 $\tau_{\text{coll}}$  はこの定義では厳密には位置に依存しますが、平均的な大きさをとることにします。これに中性子の速度  $v$  をかければいわゆる平均自由行程です。

$$\lambda = \tau_{\text{coll}} v = \frac{\hbar v}{2\langle W \rangle}. \quad (45)$$

様々なエネルギーの中性子散乱(陽子散乱)から光学模型のポテンシャル  $V(\vec{r})$ 、 $W(\vec{r})$  は決定されます。どちらも(37)式と同形の Woods-Saxon ポテンシャルで記述され、その深さ  $V_0$ 、 $W_0$  はエネルギーと共に変化します。実ポテンシャルは、 $E \lesssim 80$  MeV くらいまでは

$$-V_0 = 52 - 0.3E \text{ MeV} \quad (46)$$

でよく近似できます[5]。虚部にもエネルギー依存性がありますが、 $E \lesssim 80$  MeV の領域では  $W_0 \lesssim 10$  MeV で、中性子のエネルギーを下げるとより小さくなります。このことは、図7で、断面積の振動振幅の大きさが低エネルギーでより大きくなっていることから分かります。実際、 $E \approx 0$  の熱中性子<sup>1</sup>に対しては  $W_0 \sim 1$  MeV 程度になります。このとき、中性子の核内での速度は、 $v^2 = |2V_0|/m \approx c^2/10$  で与えられると考えられるので、(45)式より、

$$\lambda = \frac{\hbar v}{2W_0} \sim 30 \text{ fm}. \quad (47)$$

<sup>1</sup>典型的には室温  $T \sim 300$  K に対応する熱エネルギー  $kT \sim 25$  meV 程度の低エネルギー中性子のこと。

この大きさは核半径の数倍の大きさです。従って、核内に入った熱中性子は衝突せずに“かなり”自由に飛び回っていると考えるべきです。

さらにエネルギーを下げて負のエネルギーを持つ束縛された中性子はさらに大きな平均自由行程をもつと考えられます。それは、中性子がフェルミ粒子であるためパウリ原理が働き、原子核の内部自由度と相互作用して散乱されても、その行き先が無くして散乱が禁止されることに由来します。したがって、このような束縛された核子には、実ポテンシャル  $V(\vec{r})$  だけを用いた記述がよい近似になるのです。これが、Mayer-Jensen が提唱し成功した殻模型 (shell model) を与えるポテンシャルと考えてよさそうです [8, 5]。殻模型については、原子核物理のどんな教科書にも必ず載っていますので、そちらを参照してください。

ここまでの解析から、低エネルギーの核子に対して、原子核は一体場の平均ポテンシャル  $V(\vec{r})$  を提供し、その中を核子は自由に運動しているという“気体”的な姿が見えてきました。その後の研究によっても、独立粒子運動は原子核を理解する上で非常に重要な要素であることが分かってきました。5.1 節では、原子核は飽和性を代表として液体的性質を示すことを述べましたが、ここで述べた気体的性質と整合するのでしょうか。これは殻模型が提唱された後の原子核物理の大きな課題でした。次節では、独立粒子運動と一見矛盾する複合核模型を取り上げます。これもまた、中性子散乱の実験データを理解するために考えだされた模型なのですが、強結合な液体的性質を表す模型です。

### 5.3 中性子共鳴と複合核模型・量子カオス

中性子散乱の初期の実験は、1935 年ころにフェルミのグループによって行われました。中性子はクーロン障壁がないために原子核に容易に到達することができ、ラザフォードのグループが苦勞して行った人工核変換でしたが、フェルミ達はわずか 2、3 ヶ月の間に 50 近い新しい原子核を作り出すことに成功しています。さらに中性子散乱についての詳しい実験が行われ、この結果はボーアの複合核模型・液滴模型、さらには量子カオスの研究へと発展していく理論物理の一つの流れを作り出しました。

まず、5.2 節で考えたように、中性子が原子核からのポテンシャルを感じて運動するという考え方で何が言えるか考えてみます。(47) 式の平均自由行程が示すように、中性子は比較的自由に核内を運動するので、核内に入った中性子は  $R/v$  程度の時間で原子核を通過していきだろうと予想できます。熱中性子は低速ですが、一旦原子核に入ると、50 MeV 程度の引力のポテンシャル  $V(\vec{r}) < 0$  を感じて加速されます。したがって、この時間スケールは  $R/v \sim \sqrt{10}R/c$  となり、おおよそ数 fm/c ~ 数十 fm/c だと考えられます。皆さんにもなじみのある単位を使うと、 $10^{-22}$  秒程度ということが出来ます。また、この値は核子のフェルミ運動 ( $v_F$ ) の時間スケールと同じオーダーです。

$$\tau_F \sim \frac{R}{v_F} \sim 10^{-22} \text{ s.} \quad (48)$$

これが核内核子の独立粒子運動の時間スケールで、原子核の代表的な時間スケールの 1 つと考えることができます。不確定性関係を使ってエネルギースケールにすると、 $\Delta E \sim \hbar v/R \sim 10 \text{ MeV}$  のオーダーです。

問題 12：(以下フェルミ統計による簡単なフェルミ気体を知っていると仮定) 原子核の飽和性の性質 (通常密度) からフェルミ運動量  $k_F$  を求めよ。さらに、核半径のだいたい大きさから、(48) 式を確かめよ。

フェルミ等の実験によって、熱中性子の散乱実験では、ほとんどの中性子が散乱されずにガンマ線を出して捕獲されてしまうということが分かりました。ガンマ線の放出は電磁気相互作用で起こされるので、古典力学的にその確率を見積もることができます。ここで見積もった  $\tau_F \sim$  数十 fm/c 程度の短い時間でガンマ線を出す可能性は、実験で観測された確率よりもはるかに小さいことが分かりました。さらに、実験では非常に多くの共鳴状態が観測されました。この共鳴状態は eV オーダーの間隔で現れ、そのエネルギー幅は eV よりも小さい幅で現れることがあります。 $\Delta E \sim 1 \text{ eV}$  のエネルギー幅は時間にすると

$$\tau_{\text{comp}} \sim \hbar/\Delta E \sim 10^7 \times \tau_F \quad (49)$$

という時間スケールですので、ポテンシャル中を運動する中性子の時間スケール  $\tau_F$  とは全く異なる時

間スケールだということが分かります。どうやって原子核は7桁以上も異なる時間スケールを内在できるのでしょうか。

アルファ崩壊の場合、Gamowは量子力学によるトンネル効果を使って、核種によって何十桁も異なる半減期を説明することに成功しました。ところが、中性子は電荷を持たないため、ポテンシャルにクーロン障壁がありません。遠心力ポテンシャルで障壁を作ることも可能ですが、そのためには大きな角運動量をもった中性子を核内に入れる必要があります。その確率は非常に小さくなってしまいます。また実験ではs波( $l=0$ )共鳴が多く観測されています。しかも、eV程度の間隔で大量の共鳴状態が現れることをポテンシャル模型で説明するのは無理です。

フェルミ等の実験の翌年(1936)、ボーアがこの問題に解決の糸口を与えました。彼は、核内に入った中性子は原子核の内部自由度と相互作用し原子核を励起させ、中性子はその分のエネルギーを失うだろうと考えました。熱中性子は $E \approx 0$ で入射しているので、少しでもエネルギーを失うと原子核から出られなくなってしまいます。その結果として非常に長い時間(これを $\tau_{\text{comp}}$ とここでは呼びます)核内に閉じ込められ、その間にガンマ線を出して捕獲されてしまう確率が大きくなると考えられます。このメカニズムをボーアは図8のビリヤードで表現しました。核子をビリヤードの玉にたとえて、核内に入った中性子は次々と他の核子に衝突して、持ち込まれたエネルギーは瞬間に多数の核子(自由度)に分配されると考えます。多くの核子(自由度)が励起された状態になるため、この状態は非常に複雑な状態だと考えられます。このように、ボーアは、原子核に $\tau_F$ よりも遥かに長い時間スケール $\tau_{\text{comp}}$ が現れる起源が多粒子が励起された複雑な状態にあるとして、この状態を複合核(compound nucleus)と名付けました。その後、核反応が複合核を経由して起こると考えることで、統計的な反応模型が発展しました。また複合核の理論として有名なのが、1955年にウィグナーが提唱した乱雑行列理論(random matrix theory)です。これは複雑な系のエネルギー準位を統計的に扱うことを可能にし、その後の量子カオスの研究において中心的な役割を果たしました。現代では様々な分野に応用されてい

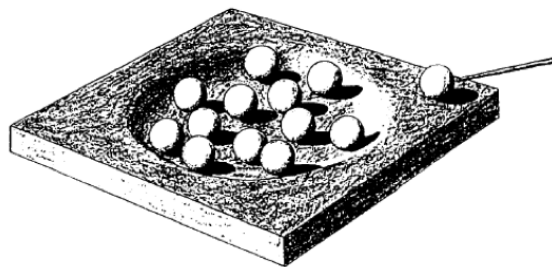


図8: 熱中性子共鳴を説明するボーアの複合核模型のアイデア。文献[9]より。

ます。乱雑行列理論の紹介は、文献[5]に見つけることができます。

ボーアのアイデアは、5.2節で述べたポテンシャル中を自由に運動する核子とは対極的です。原子核は非常に強く結合した系であって、系の励起は核子の運動が独立に励起されるのではなく、“コヒーレント”(一緒に)に動く運動になると考えられます。これは液体の運動を連想させ、液滴模型の発展へとつながっていきます。しかしここに大きな問題があることに気づくと思います。核内に入った中性子は原子核から飛び出すことなく、他の核子にエネルギーを分け与えてしまうということは、中性子の平均自由行程は、原子核の大きさよりも小さいと考えたくなります。これは、(47)式と矛盾してしまいます。どのように考えるべきでしょうか。

熱中性子は原子核の外では1 eVというオーダーの非常に小さなエネルギーを持っているために運動量(波数)は $k_1 \sim 10^{-4} \text{ fm}^{-1}$ 程度になります。しかし核内では引力ポテンシャルのため $k_2 \sim 1 \text{ fm}^{-1}$ 程度です。この核表面で起きる運動量の大きな変化は、古典力学では単に中性子が核内から核外に出るときに遅くなるというだけですが、量子力学ではそれだけに留まりません。1次元の量子力学で見たポテンシャルの壁の透過率(19)式、もしくは $k_1 \ll k_2$ で成り立つ近似式(20)を見てください。中性子が原子核表面から飛び出す確率は、古典的には $E > 0$ であれば $P_T = 1$ ですが、量子力学では $P_T \approx 4k_1/k_2$ になります。上の1 eVの中性子の場合を考えると、 $P_T \sim 10^{-3}$ という小さな確率になってしまいます。実際の原子核のポテンシャルはWoods-Saxon型に近いものですから、ここでの評価はやや $P_T$ を小さく見積もり過ぎているかもしれ

ませんが、表面がはつきりしたポテンシャルに対して定性的には同じことが言えます。つまり、中性子はポテンシャル障壁がなくても、de Broglie 波の波数 (波長) が表面で大きく変化すると、量子効果によって、核内にかなり長い時間 (これを  $\tau_{\text{conf}}$  とここでは呼びます) 閉じ込められてしまうのです。中性子が飛び出すまでには、 $P_T^{-1}$  回程度核表面にぶつかる必要があるため、核内を往復運動するその距離は  $P_T^{-1}R \sim 10^3 R$  ( $R$ : 核半径) 程度と考えられます。すると量子的閉じ込め時間は、

$$\tau_{\text{conf}} \sim \frac{R}{P_T v} \sim 10^3 \times \tau_F \quad (50)$$

です。これではまだ  $\tau_{\text{comp}}$  には 4 桁程度足りませんが、これだけの時間があれば、(47) 式の平均自由行程よりは遙かに長い距離を中性子は核内を運動するので、衝突によってエネルギーを失い、ボーアの複合核が実現されるのです。

## 6 原子核の変形

5 節で見たように、原子核には様々な時間スケールが共存しています。一体問題、二体問題、多体問題がそれぞれに異なる時間スケールを生み出して、そこには量子効果が非常に重要な役割を果たしていることを見ました。ここで最後にもう一つ別の時間スケールを議論したいと思います。それは核変形・表面振動に関わる時間スケール  $\tau_{\text{vib}}$  です。

原子核は fm スケールの小さな物体ですが、現在では多くの原子核が球形からずれた形をしていると考えられています [7]。ミクロな物体の変形で代表的なものが分子の形でしょう。皆さんも化学の実験室等で、分子模型を一度は見たことがあると思います。2 原子分子がダンベル型、水や二酸化炭素等の 3 原子分子が三角形になるということは幾何学的に考えて当然のように思われます。しかし、ここでまず強調したいことは、原子核の変形は“古典的”な原子配置による分子の形や結晶構造とは全く異なるものだということです。これは図 3 で議論したこと、すなわち古典系と量子系の違いです。2 原子分子の場合、原子間距離はポテンシャルの底  $R$  に固定されていますが、重陽子の場合、陽子・中性子間の距離は量子的な零点運動のために大きく揺らいでいます。したがって、原子を沢山集めるとほとんど

の系は低温で結晶化しますが、陽子・中性子を沢山集めた核物質は零度でも結晶化しないと考えられています。原子核に類似した系をあえてあげるとすれば、液体ヘリウムでしょう。つまり、原子核の変形とは、分子の変形とは全く異なり、液体ヘリウムの液滴が絶体零度で変形するかどうかという問題に近いのです。この強い量子性を認識しておくことは、原子核を理解する上で欠かせない要素です。

5.2 節でも述べたように、Mayer-Jensen によって、3 次元等方調和振動子ポテンシャルに基づく殻模型 (シェルモデル) が提唱され、核子の一粒子運動 (独立粒子運動) という側面から様々な原子核の性質が解明されていきました。その一方で、どうしても球形のポテンシャルでは解決できない謎も残されました。やがて、そのポテンシャルを変形させた変形殻模型で謎を解決しようとする考えが生まれてきます。しかし、原子核が変形するメカニズムを理解するためには、核子を閉じ込めているポテンシャル自体が逆に核子の運動そのものから作られていること (平均場) を考慮する必要があります。これは言い換えると、核子の一粒子運動と平均場との間の結合効果であり、原子核の統一模型 [7] の背後にある「対称性の自発的破れ」のアイデアに直結します (図 9)。変形を表わす集団的自由度と一粒子運動との結合がなぜ原子核を変形させることができるのか、次に統一模型 (集団模型とも呼ばれる) を単純化した模型で、問題を具体的に考察してみましょう。

### 6.1 統一模型と対称性の自発的破れ

まず、比較的重い原子核の基底状態近傍では、次の時間スケールの分離が近似的に成立し、一粒子運動  $x_i$  ( $i = 1, \dots, A$ ) は「早い運動」で、その時間スケールは (48) 式の  $\tau_F$ 。一方でポテンシャル形状が振動する自由度  $\beta$  は「遅い運動」で、その時間スケールは 1 桁程度大きくなります。

$$\tau_{\text{vib}} \sim 10 \times \tau_F. \quad (51)$$

10 倍というスケールは、前にみた  $\tau_F$  と  $\tau_{\text{comp}}$  との差に比べると小さいですが、ここでは  $\tau_F$  よりも十分に長いとして、断熱近似で取り扱うことにします。

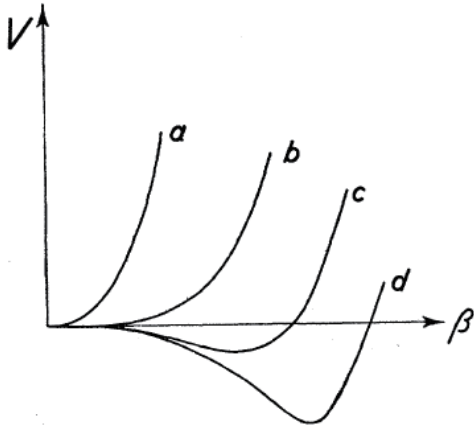


図 9: 原子核の有効ポテンシャルを変形パラメータ  $\beta$  の関数としてプロットしたもの。文献 [10] において、閉殻配位の原子核にバレンス核子を加えることで、ポテンシャルは  $a$  から  $d$  へと変化することを示すために用いられている。

系のハミルトニアンは、形状振動に関わる部分  $T_\beta + V(\beta)$  と独立粒子運動部分  $h(x)$ 、およびその間の結合項  $H_{\text{coupl}}(x, \beta)$  で与えられ、

$$H(x, \beta) = T_\beta + V(\beta) + h(x) + H_{\text{coupl}}(x, \beta), \quad (52)$$

と書けるとします。まず、 $\beta$  を固定した断熱 (Born-Oppenheimer) 近似の下での  $x$  に関するシュレディンガー方程式、

$$\{h + H_{\text{coupl}}(\beta)\}|n(\beta)\rangle = \epsilon_n(\beta)|n(\beta)\rangle \quad (53)$$

を解きます。 $h(x)$  としては球対称の殻模型ポテンシャルのハミルトニアンを考えます。この解  $|n(\beta)\rangle$  は、核変形が  $\beta$  における核子の独立粒子運動状態を与えます。系全体の状態を  $\Psi(x, \beta) = \sum_n |n(\beta)\rangle \otimes \psi_n(\beta)$  と書き、集団自由度の運動エネルギー項からくる非対角要素を  $t_{nm}(\beta) = \langle n(\beta)|T_\beta|m(\beta)\rangle$  ( $m \neq n$ ) とすれば、チャンネル結合方程式<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \{T_\beta + V(\beta) + \epsilon_n(\beta)\} \psi_n(\beta) + \sum_{m \neq n} t_{nm}(\beta) \psi_m(\beta) \\ = E \psi_n(\beta), \end{aligned} \quad (54)$$

<sup>2</sup>対角要素  $t_{nn}(\beta)$  は  $\epsilon_n(\beta)$  に繰り込み、集団変数  $\beta$  は 1 自由度としました。集団変数が複数存在する場合には、対角要素だけでも、準位交差に伴うベリーの位相に関わる問題などがありますが、本筋からはずれるのでここでは触れません。

が形状振動 (集団自由度) を決定する方程式となります。異なる一粒子状態  $|n(\beta)\rangle$  毎に異なるポテンシャル・エネルギー曲線  $V(\beta) + \epsilon_n(\beta)$  が対応し、チャンネル間の結合が  $t_{nm}(\beta)$  で与えられます。この段階では、 $V(\beta) + \epsilon_n(\beta)$  は球形 ( $\beta = 0$ ) で最小の値をとります。もし、一粒子状態 (早い自由度) の固有エネルギーのうち基底状態が他から分離され、 $\epsilon_n - \epsilon_0 \gg t_{n0}$  であれば、(54) 式において  $t_{nm}$  が無視できて、有効ポテンシャル ( $V(\beta) + \epsilon_0(\beta)$ ) は  $\beta = 0$  で最小になり、基底状態において原子核は丸いということになります (図 9 での  $a$  に対応)。しかし、 $\epsilon_0$  が他の  $\epsilon_n$  と  $\beta = 0$  で近似的に縮退する場合は  $t_{n0}$  が無視できません。

ここで、問題を具体的にするため、 $n = 0, 1$  の 2 準位のみ ( $\epsilon_0(\beta) \approx 0$ ,  $\epsilon_1(\beta) \approx e\beta$ )、 $\beta \geq 0$  のみを考え、 $\beta = 0$  の球形の周りで展開し、定数項を除く最低次の項のみが有効であるとして、

$$V(\beta) \approx \frac{1}{2}C\beta^2, \quad t_{01}(\beta) \approx q\beta, \quad t_{10}(\beta) \approx q^*\beta. \quad (55)$$

上の仮定から、 $C > 0$ 、 $e > 0$ 。(54) 式で  $T_\beta$  を無視した有効ポテンシャルは、 $2 \times 2$  行列の対角化により簡単に求められ、 $\beta = e(\sqrt{1 + 4|q|^2/e^2} - 1)/(2C) > 0$  において最小となることが分かります。つまり、対称性の自発的破れが実現したことになります (図 9 での  $c$  または  $d$  に対応)。

ここでの考察は、断熱近似を用いた簡単なものですが、原子核が回転対称性を破るメカニズムを端的に表現しています。まず、振動と核子の自由度の間の結合項  $H_{\text{coupl}}(x, \beta)$  が無ければ、有効ポテンシャル  $V(\beta) + \epsilon_n$  は常に球形 ( $\beta = 0$ ) で最小となるため、原子核は変形しません。これが、先に、統一模型の本質がこの結合項にあると述べた所以です。次に、核子の一粒子運動  $\epsilon_n(\beta)$  が球形で近似的に縮退する状況が必要です。これは、閉殻 (closed shell) に核子 (空孔) を加えた開殻 (open shell) の原子核が自発的に変形することを示唆します。

こうして原子核が変形すると、球形の原子核には存在しない「回転」という集団的自由度が出現します。これによって、原子核のスペクトルには特徴的な回転スペクトルが現れ、その回転の時間スケールは、先ほどの振動運動よりもさらに遅いため、

$$\tau_{\text{rot}} \sim 10 \times \tau_{\text{vib}} \sim 10^2 \times \tau_F. \quad (56)$$



程度となります。

ここでは触れられませんでした。核子が対を組んだクーパー対が凝縮することで発生する「核子超流動」の現象も、この議論と同じように考えることが可能です。有効ポテンシャルが対称性の高い状態 ( $\beta = 0$ ) において縮退を引き起こすとき、その対称性は自発的に破られるのです。

## 7 最後に

ここまで、原子核に内在する沢山の時間スケールが登場しました。核子の一粒子運動(フェルミ運動)の時間スケール( $\tau_F$ )、集団運動の時間スケール( $\tau_{\text{vib}}$ 、 $\tau_{\text{rot}}$ )、熱中性子が核内で衝突してエネルギーを失うまでの時間( $\tau_{\text{coll}}$ )、熱中性子の量子的閉じ込め時間( $\tau_{\text{conf}}$ )、複合核の共鳴時間( $\tau_{\text{comp}}$ )。これらの異なる時間スケールが現れるためには、量子力学が本質的であることも理解できたかと思えます。何桁にもわたって異なる時間スケールを持っていることが、原子核が液体的性質を示したり、気体的性質を示したりすることを理解する上では重要です。また、原子核のような有限の系で、核変形といった対称性の破れを正確に理解する上でも重要です。

原子核物理の教科書を読むときには、ぜひこのことを頭に入れた上で読んで下さい。教科書の中には誤った記述もあります。これらの誤りは、原子核に対する間違ったイメージに基づいているので、正しいイメージを持っている人は、何かおかしいとその誤りに気づくはずですが、こういったことは、原子核物理に限らずすべての分野に当てはまることですが、残念ながら特に核物理には混乱が多いように感じます。

---

最後に原子核物理に関する教科書を紹介しておきます。まず、

「原子核と放射」 八木浩輔著 (朝倉書店)  
が量子力学が核現象にどう応用できるのかを知る上では参考になります。5.1節のアルファ崩壊については、WKB法についても詳しく解説されています。上記の教科書は原子核物理の内容の一部抜粋について解説したのですが、全般的な教科書としては、同じ著者の

「原子核物理学」 八木浩輔著 (朝倉書店)

が参考になると思います。さらに詳しく勉強したい人は、大学院レベルになりますが、

P. Ring and P. Schuck, “Nuclear many-body problems” (Springer-Verlag)

が最近のこの分野のスタンダードな教科書となっています。原子核理論で培われた様々な多体理論のアプローチが紹介されています。これにも飽き足りない人は、ぜひ参考文献 [5]、[7] を読んでみて下さい。読みやすい本とは言えませんが、原子核物理を研究する人にとって、今でも非常に示唆に富んだ名著です。

## 参考文献

- [1] 拙著、「ラザフォードによる原子核発見 100 周年」, 化学 Vol. 66, No. 11, (2011) 39.
- [2] E. Rutherford, *Phil. Mag.* **21** (2011) 669.
- [3] R.M. Eisberg and C.E. Porter, *Rev. Mod. Phys.* **33** (1961) 190.
- [4] B. Frois and C. Papanicolas, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **37** (1987) 133.
- [5] A. Bohr and B. R. Mottelson, *Nuclear Structure* Vol. 1 (Benjamin, 1969).
- [6] R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals* (McGraw Hill, 1965).
- [7] A. Bohr and B. R. Mottelson, *Nuclear Structure* Vol. 2 (Benjamin, 1975).
- [8] M. G. Mayer and J. H. D. Jensen, *Elementary theory of nuclear shell structure*, (Wiley, 1955).
- [9] N. Bohr, *Nature* 137 (1936) 344.
- [10] K. Alder et al., *Rev. Mod. Phys.* **28** (1956) 432.